

SÉRIE A, N°. 2886

N°. D'ORDRE

3757

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR ISTVÁN FÁRY

1^{re} THÈSE. — "COHOMOLOGIE D'UNE CERTAINE CLASSE D'APPLICATIONS".

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE 18 Juin 1955 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN:

MM. A. DENJOY	PRÉSIDENT.
H. CARTAN	} EXAMINATEURS.
J. LERAY	

SÉRIE A, N°. 2886

N°. D'ORDRE:

3757

THÈSES

PRÉSENTÉES

À LA FACULTÉ DES SCIENCES
DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

POUR OBTENIR

LE GRADE DE DOCTEUR ÈS SCIENCES MATHÉMATIQUES

PAR ISTVÁN FÁRY

1^{re} THÈSE. — "COHOMOLOGIE D'UNE CERTAINE CLASSE D'APPLICATIONS".

2^e THÈSE. — PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ.

SOUTENUES LE 18 Juin 1955 DEVANT LA COMMISSION D'EXAMEN:

MM. A. DENJOY PRÉSIDENT.

H. CARTAN }
J. LERAY } EXAMINATEURS.

FACULTÉ DES SCIENCES DE L'UNIVERSITÉ DE PARIS

Doyen.....J. PERES

PROFESSEURS

G. JULIA.....	T Analyse supérieure et Algèbre supérieure	QUENEY.....	T Météor. et dyn. atmosphérique
E. DARMOIS.....	T Enseignement de Physique	GALLIEN.....	T Embryologie
R. LEVY.....	T Physiologie comparée	EICHHORN.....	T Biologie végétale (P.C.B.)
FOCH.....	T Mécanique physique et Exper.	DE CUGNAC.....	Biologie végétale (P.C.B.)
PAUTHENIER.....	T Electrotechnique générale	M ^{le} COUCHOIS.....	T Chimie physique
DE BROGLIE.....	T Théories physiques	THELLIER.....	T Physique du globe
JOB.....	T Chimie générale	AUDUBERT.....	T Electrochimie
PRENANT.....	T Anatomie et Histol. Comparées	L'HERITIER.....	T Génétique
GARNIER.....	T Géométrie supérieure	GRIVET.....	T Radioélectricité
PERES.....	T Mécanique des fluides et appl.	PONCIN.....	T Mécanique des fluides
LAUGIER.....	T Physiologie générale	THIRY.....	T Mécanique appliquée
M. CURIE.....	T Physique (P.C.B.)	DUBREIL.....	T Arith. et theor. des nombres
BARRABE.....	T Géol. struct. et Geol. appl.	QUELET.....	T Chimie organique
G. DARMOIS.....	T Calc. des prob. et Phys. Math.	CAGNIARD.....	T Géophysique appliquée
J. BOURCART.....	T Géogr. phys. et Geol. dynam.	CHAMPETIER.....	T Chimie macromoléculaire
M ^{me} JOLIOT CURIE.....	T Physique nucléaire et radioactivité.	CUVILLIER.....	T Géol. struct. et Géol. appliquée
PLANTEFOL.....	T Botanique	JUNG.....	T Pétrographie
CABANNES.....	T Recherches physiques	TRILLAT.....	T Chimie physique
GRASSE.....	T Evol. des êtres organisés.	WIEMANN.....	T Chimie (M.P.C.)
PREVOST.....	T Chimie organique	JACQUINOT.....	T Spectroscopie et physique céleste
BOULIGAND.....	T Applic. de l'analyse à la Géométrie.	VASSY.....	T Physique de l'atmosphère
CHAUDRON.....	T Chimie appliquée	DESTOUCHES.....	T Théories physiques
WYART.....	T Minéralogie	M. PRUVOST.....	T Géologie
TEISSIER.....	T Zoologie	AMIEL.....	T Chimie (P.C.B.)
MANGENOT.....	T Biologie végétale	HOCART.....	T Minéralogie
P. AUGER.....	T Physique quantique et Re at.	J. P. MATHIEU.....	T Physique (P.C.B.)
MONNIER.....	T Physiologie des fonctions	COUTEAUX.....	T Biologie animale (P.C.B.)
PIVETEAU.....	T Géologie	MAY.....	Biologie animale (P.C.B.)
ROCARD.....	T Physique (E.N.S.)	CHOQUET.....	T Calcul diff. et Intégral
H. CARTAN.....	T Mathématiques (E.N.S.)	FELDMANN.....	Biologie (P.C.B.)
LAFFITTE.....	T Chimie générale	GUINIER.....	T Physique (P.C.B.)
FAVARD.....	T Mécanique générale	JOST.....	T Biologie (P.C.B.)
COULOMB.....	T Physique du globe	FORTET.....	T Calcul des probabilités
M ^{le} COUSIN.....	T Biologie animale (P.C.B.)	SCHWARTZ.....	T Méth. math. de la physique
CHRETIEN.....	T Chimie minérale	CHOUARD.....	T Physiologie végétale
P. DRACH.....	T Zoologie	MALAVARD.....	T Aviation
KASTLER.....	T Physique	BRELOT.....	T Calcul différentiel
EPHRUSSI.....	T Génétique	NORMANT.....	T Chimie (P.C.B.)
WURMSER.....	T Biol. physico-chimique	BENARD.....	Chimie (P.C.B.)
RIVIERE.....	T Géologie (S.P.C.N.)	BUVAT.....	Botanique (E.N.S.)
GAUTHERET.....	T Biologie végétale (P.C.B.)	DUGUE.....	T Statistiques mathématiques
LUCAS.....	T Physique	GELOSO.....	Chimie (S.P.C.N.)
A. THOMAS.....	T Biologie cellulaire	SOULAIRAC.....	Psychophysiologie
ARNULF.....	T Optique appliquée	ULRICH.....	T Physiologie végétale
M. MORAND.....	T Physique	MARECHAL.....	T Optique théorique et appliquée
SOLEILLET.....	T Physique	KIRRMANN.....	T Théories chimiques
FORTIER.....	T Mecan. exper. des fluides	CHADEFAUD.....	Botanique
DANJON.....	T Astronomie	DESTRIAU.....	Physique (M.P.C.)
FROMAGEOT.....	T Chimie biologique	M ^{le} LE BRETON.....	Physiologie générale
LAPORTE.....	T Phys. génér. et radioact.	SALEM.....	Mathématiques générales
JANET.....	T Mec. anal et Mec. céleste	ESCLANGON.....	T Physique (P.C.B.)
PETIT.....	T Biologie maritime	LELONG.....	T Mathématiques générales

Secrétaire Général.....CH. MONIER

VALEURS CRITIQUES ET ALGÈBRES SPECTRALES D'UNE APPLICATION

PAR ISTVÁN FÁRY

(Received August 1, 1955)

Introduction

I. Le but essentiel du présent mémoire peut être sommairement formulé comme suit:

Soient X, Y des espaces, et $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Nous voulons montrer que, si f appartient à un certain type, d'ailleurs usuel et contenant en particulier toutes les applications simpliciales, alors on peut lui attacher, de façon topologiquement invariante, une algèbre spectrale aussi simple et maniable que celle d'un espace fibré: cette algèbre spectrale débute par une somme directe d'algèbres de cohomologie à coefficients locaux, et elle aboutit à une algèbre graduée de l'algèbre de cohomologie de l'espace X . D'ailleurs, si X est un espace fibré, Y est sa base, et $f: X \rightarrow Y$ est la projection, elle est l'algèbre spectrale bien connue attachée à la structure fibrée.

II. Fixons la terminologie et les notations, afin de préciser ces affirmations.

1. Sauf mention expresse du contraire, *espace* signifie dans ce qui suit espace localement compact (Bourbaki [2], p. 48).

2. Nous fixons une fois pour toutes un anneau commutatif A possédant un élément unité, et nous l'appelons *anneau des coefficients*; les A -algèbres (Bourbaki [1], p. 99) seront appelées *algèbres*, et nous disons *module* au lieu de A -module.

3. Si X est un espace, $H(X)$ désigne l'algèbre de cohomologie à *supports compacts* de l'espace X à coefficients dans A ; nous disons brièvement que $H(X)$ est l'algèbre de cohomologie de X . $H(X)$ est, en effet, une algèbre ("cup product"); son module est la somme directe des modules $H^p(X)$ ($p = 0, 1, \dots$) dits modules de cohomologie de dimension p . Au lieu du mot dimension, nous disons *degré*. $H^p(X)$ sera donc appelé module de cohomologie de *degré* p . Si F est un fermé de X , l'homomorphisme naturel de $H(X)$ dans $H(F)$ est appelé *section* (par F), et il est noté $F: H(X) \rightarrow H(F)$; si $h \in H(X)$, Fh désigne donc son image par la section par F , $Fh \in H(F)$ (v. le n° 5, et travaux cités).

4. Si E_r est une algèbre ($r \geq r_0$) munie d'une différentielle d_r , si E_{r+1} est l'algèbre de cohomologie de (E_r, d_r) , et si A-D du n° 7 sont valables, nous disons que $\{E_r\}$ est une *algèbre spectrale*. Dans les énoncés nous ne pouvons pas expliciter toute la structure algébrique $\{E_r\}$, et nous donnons: 1° l'algèbre H , dont l'algèbre graduée GH est $\subset E_\infty$; éventuellement la filtration de H , ou une estimation de celle-ci; 2° le terme E_2 de l'algèbre spectrale, et les degrés dans E_2 ; éventuellement la différentielle d_2 de E_2 . Cela posé, nous parlerons de "*l'algèbre spectrale* E_2, GH ".

III. Dans le Théorème A ci-dessous nous utilisons les expressions suivantes: application de type d'homologie simple (Définition 2 du n° 8); valeur-critique de f (Définition 1 du n° 8); faisceau localement constant (Définition 3 du n° 1).

Les définitions citées font intervenir des notions techniques de la théorie des faisceaux, nous donnons donc à présent des définitions directes. (Notons toutefois que dans la théorie générale on ne peut pas se contenter des définitions trop restrictives ci-dessous données.)

1. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue de l'espace X sur un espace localement connexe Y (Bourbaki [2], p. 53). Un point $y_0 \in Y$ est dit *valeur non critique* de f , si y_0 possède un voisinage fermé V dans Y , tel que la section

$$(1) \quad H(f^{-1}V) \rightarrow H(f^{-1}y) \quad (y \in V)$$

applique la première algèbre sur la seconde, et que son noyau soit indépendant de y quand ce point décrit V ; les autres points de Y sont appelés *valeurs critiques* de f .

2. Cherchons l'ensemble des valeurs critiques de f , et notons le par Y_1 ; c'est un fermé de Y . Si $Y_1 \neq Y$, et Y_1 est localement connexe, posons $X_1 = f^{-1}(Y_1)$; sinon, X_1 ne soit pas défini. Dans le cas favorable notons Y_2 l'ensemble des valeurs critiques de $f|X_1$, etc. Dans certains cas nous pouvons donc définir une suite

$$(2) \quad Y_0 \supset Y_1 \supset \dots \quad (Y_0 = Y)$$

de fermés de Y , appelés *ensembles critiques* de f , tels que Y_{q+1} soit l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de f à $f^{-1}(Y_q)$. Nous disons que f est de *type d'homologie simple*, si Y_q est défini pour tout entier q , et

$$(3) \quad \bigcap_{q=0}^{\infty} Y_q = \emptyset.$$

(Si $Y_q = \emptyset$, nous convenons $f^{-1}(\emptyset) = \emptyset$, et $H(\emptyset) = 0$.)

Nous montrerons que c'est le cas, si f est une application simpliciale quelconque d'un complexe simplicial dans un autre (Proposition 1 du n° 8).

3. L'expression "*faisceau localement constant*" figurant dans le Théorème A ci-dessous est équivalente à l'expression "coefficients locaux" dans des conditions que nous allons préciser à présent. Soient V_α les composantes connexes de l'espace différence $Y_q - Y_{q+1}$ du second membre de (5) ci-dessous; V_α est donc connexe, localement connexe, ouvert et fermé dans $Y_q - Y_{q+1}$. On a:

$$(4) \quad H(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}_q) = \sum_{\alpha} H(V_{\alpha}, \mathfrak{F}_{q\alpha}) \quad (\bigcup_{\alpha} V_{\alpha} = Y_q - Y_{q+1}).$$

Dans le second membre de (4) les $\mathfrak{F}_{q\alpha}$ sont des systèmes de coefficients locaux au sens classique ("bundle of coefficients" de Steenrod [1], pp. 151-155), pourvu que les V_α soient localement connexes et localement simplement connexes *par arcs* ("arcwise connected and arcwise locally connected"). Un $\mathfrak{F}_{q\alpha}$ est donc déterminé par une algèbre que nous notons $\mathfrak{F}_{q\alpha}(y) = \mathfrak{F}_q(y)$, $y \in V_\alpha$, et par les opérations de $\pi_1(V_\alpha, y)$ dans cette algèbre. $H(V_\alpha, \mathfrak{F}_{q\alpha})$ est alors une algèbre de cohomologie par rapport à un système de coefficients locaux.

Si f est simpliciale, les V_α sont des complexes simpliciaux; la définition de Steenrod ([1], pp. 155-166) s'applique donc dans ce cas. C'est dans ce sens que nous pouvons dire que le second membre de (5) ci-dessous est une somme directe d'algèbres de cohomologie classiques.

Cela posé, formulons le principal résultat du présent mémoire:

THÉORÈME A. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application de type d'homologie simple. (Exemple: X et Y sont des complexes simpliciaux localement finis, et f est une application simpliciale quelconque.) L'application f détermine:

1° La suite (2) de fermés de l'espace Y , où Y_{q+1} est l'ensemble des valeurs critiques de la restriction de f à $X_q = f^{-1}(Y_q)$. (3) est valable. Y_{q+1} est un fermé rare de Y_q . (Dans le cas simplicial Y_{q+1} est un sous-complexe fermé et rare de Y_q .)

2° Un faisceau localement constant $\mathfrak{F}_q$ sur l'espace différence $Y_q - Y_{q+1}$ pour tout q ; $\mathfrak{F}_q = \sum_{t \geq 0} \mathfrak{F}_q^t$. Si $y \in Y_q - Y_{q+1}$, $\mathfrak{F}_q^t(y) \approx H^t(f^{-1}y)$. À un automorphisme près $H(f^{-1}y)$ est donc indépendant de y , quand ce point décrit un composant connexe de $Y_q - Y_{q+1}$.

3° Une filtration ψ de $H(X)$, dont l'algèbre graduée est notée $GH(X)$.

4° Une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que

$$(5) \quad E_2 = \sum_{q \geq 0} H(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}_q)$$

$$(6) \quad E_\infty \supset GH(X).$$

Le sous-module $H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}_q^t)$ de E_2 est homogène de degré canonique $p + t$, et de degré filtrant $p - q$. La différentielle d_2 de E_2 est la somme des différentielles (38), (39) du n° 10. La multiplication de $\{E_r\}$ est décrite dans le Théorème 1 du n° 10. Dans le cas favorable (si, par exemple, $\dim Y \leq n$, et $Y_{m+1} = \emptyset$)

$$(7) \quad E_r = GH(X)$$

si r est assez grand ($> m + n$).

Ces données sont des invariants topologiques de f .

NOTE 1. Si X est un espace fibré (au sens de Steenrod [1], 1.1. Provisional definition, p. 3), sa base Y étant localement connexe, et $f: X \rightarrow Y$ est la projection, alors f est de type d'homologie simple, $Y_1 = \emptyset$, et l'algèbre spectrale (5), (6) est celle utilisée dans la théorie des espaces fibrés.

NOTE 2. L'algèbre spectrale (5), (6) n'est pas un invariant du type d'homotopie de f .

IV. La notion d'algèbre spectrale est bien connue aujourd'hui. C'est seulement cette notion purement algébrique de la théorie de J. Leray qui figure dans le Théorème A. En fait, l'algèbre spectrale (5), (6) est une *spécialisation* de celle de Leray ([4], p. 91, (50.2)). Toutefois, cette "spécialisation" n'est pas banale du tout: on ne peut y arriver que grâce à une étude assez poussée de la théorie des faisceaux. Ce travail est donc une contribution à la théorie de l'algèbre spectrale d'une application continue, due à J. Leray, et son initiative consiste: 1° à amorcer une théorie de structure des faisceaux à partir de la notion de *point critique d'un faisceau*; 2° à faire intervenir les valeurs critiques d'une application dans le premier terme invariant de l'algèbre spectrale de celle-ci, et par là-même rendre accessible ce terme aux calculs effectifs.

V. Dans ce qui suit nous décrivons la division du travail. Les sujets abordés correspondent aux problèmes 1°, 2° de IV; nous ne traitons que des questions qui se rapportent directement au Théorème A.

Le premier chapitre étudie les faisceaux (nos 1–4). Nous complétons la théorie de Leray ([4], pp. 43–47, et pp. 124–133) par des résultats concernant la structure des faisceaux. La notion de faisceau se compose d'éléments algébriques et topologiques, une théorie de structure complète devrait donc envisager les faisceaux du point de vue algébrique et topologique. Nous nous bornons ici aux problèmes topologiques; l'aspect algébrique de ces questions sera traité ailleurs. À la base de l'étude topologique des faisceaux est la notion de point critique d'un faisceau. Je suis arrivé à dégager cette notion en étudiant la connexion entre les valeurs critiques d'une application et l'algèbre spectrale de celle-ci (Fáry [1], p. 688, définition (6)).

Grâce à la notion de point critique d'un faisceau nous distinguons deux grandes classes de faisceaux. Si le faisceau $\mathcal{F}$ appartient à la première classe (cas favorable), il existe une suite de sous-espaces fermés Y_α de l'espace Y où $\mathcal{F}$ est défini, telle que la restriction $\mathcal{F}|(Y_\alpha - Y_{\alpha+1})$ du faisceau $\mathcal{F}$ à $Y_\alpha - Y_{\alpha+1}$ a une structure très simple (grosso modo c'est un faisceau localement constant) pour tout α . Si, par contre, $\mathcal{F}$ est de la seconde classe (cas défavorable), il existe une partie Y_Ω de Y , telle que $\mathcal{F}|Y_\Omega$ est foncièrement compliqué. Un résultat du n° 4 prouve que des hypothèses de finitude de nature simple excluent le cas défavorable.

Le second chapitre utilise les résultats du chapitre 1 pour étudier l'algèbre de cohomologie $H(Y, \mathcal{F})$ d'un espace Y par rapport à un faisceau $\mathcal{F}$ défini sur Y (nos 5, 6, 7). Nous supposons que $\mathcal{F}$ appartient à la première classe de faisceaux ci-dessus mentionnée, et nous montrons qu'il existe alors une algèbre spectrale reliant des invariants classiques à $H(Y, \mathcal{F})$ (v. le Théorème 1 du n° 7).

Une grande partie des nos 5, 6 de ce chapitre est consacrée aux rappels des notions et des résultats de la théorie de J. Leray. Nous les avons donnés pour deux raisons principales: 1° nous avons voulu dégager la partie de la théorie de J. Leray, qui nous a été indispensable dans la suite; 2° nous avons voulu donner des variantes des définitions et des énoncés de la théorie en question, qui sont utiles dans d'autres connexions (la preuve de Fáry [7] du Théorème fondamental du n° 6 se rattache directement à ces énoncés).

Le premier n° du dernier chapitre applique les notions et les résultats du chapitre 1 en théorie des applications continues (n° 8). La théorie de J. Leray y introduit la notion de faisceau image $\mathcal{F}$ de l'application f (cf. (1)–(4) du n° 8). C'est ce faisceau que nous envisageons: les points critiques de $\mathcal{F}$ sont par définition les valeurs critiques de f . Nous donnons des critères concernant les valeurs critiques, définissons les applications de type d'homologie simple, et prouvons, entre autres, que toute application simpliciale est de ce type-là.

Cette dernière remarque montre que la classe des applications de type d'homologie simple est grande. Dans la présente théorie les applications simpliciales ne jouent pas d'autre rôle: bien qu'elles appartiennent à la classe des applications de type d'homologie simple, on ne les utilise ni dans le développement de la théorie, ni dans ses applications connues. Vu la Note 2 de III elles ne peuvent pas jouer le même rôle que d'habitude: des applications $g: X \rightarrow Y$ homotopes et arbitrairement près d'une $f: X \rightarrow Y$ donnée peuvent avoir des algèbres spec-

trales (5), (6) très différentes. Par exemple: Si Y est la droite, donc f est une fonction continue partout définie dans X , les invariants de l'algèbre spectrale (5), (6) sont apparentés aux modules critiques de M. Morse (v. n° 8, et Fáy [2], [3]). Le problème de "stabilité" des invariants de (5), (6) semblait être un sujet délicat, et nous sommes loin de pouvoir l'aborder à présent.

Le but principal du dernier n° du travail est de prouver le Théorème A, et d'amorcer la recherche des invariants de (5), (6). Dans la Proposition 2 du n° 10 nous donnons une estimation de la filtration ψ de $H(X)$. Le plus important résultat concernant (5), (6) est le Théorème 2 du n° 10 dû à J. Leray (Cours professés au Collège de France, Janvier-Mars 1955); je le publie ici avec sa permission. Il exprime la différentielle d_2 de (5) à l'aide d'un cobord d'une suite exacte, et à l'aide de la différentielle d_2 d'un "espace fibré" (cf. (38), (39) du n° 10). Dans un mémoire ultérieur ce résultat sera important pour nous (je le connaissais dans ce cas particulier seulement).

Le n° 9 du dernier chapitre ne contient pas de résultats originaux, mais il est important en ce qui concerne la méthode de ce travail. Dans son préambule nous rappelons certains principes de la théorie de J. Leray, qui guident la construction des algèbres spectrales d'une application. Lorsque X est un espace fibré, Y est sa base, et $f: X \rightarrow Y$ est la projection, on a donné des constructions de (5), (6) utilisant des méthodes différentes de celle de J. Leray. Nous n'avons même pas essayé d'utiliser ces constructions, car nous pensons que la méthode de J. Leray est la plus simple, et la plus naturelle. Nous croyons en outre que les possibilités de cette construction ne sont nullement épuisées, et que l'analyse de ses principes sera encore utile.

VI. Le présent mémoire est entièrement consacré aux questions ci-dessus mentionnées, il ne donne donc pas d'applications du Théorème A. Dans un travail ultérieur nous utilisons ce théorème dans la théorie de cohomologie des variétés algébriques. Nous y explicitons l'algèbre spectrale (5), (6) dans un cas particulier, nous montrons que ses invariants s'interprètent à l'aide des "modules critiques" de l'application, et qu'ils généralisent les invariants de la théorie de Lefschetz [1]. En nous servant de la forme explicite de l'algèbre spectrale nous déterminons la cohomologie des variétés algébriques, qui sont des intersections complètes.

Les Notes Fáy [1]–[5] concernant l'algèbre spectrale d'une application continue utilisent le Théorème 1 du n° 9 dû à J. Leray, leur méthode est donc différente de celle du présent mémoire. Toutefois, nous y avons déjà donné une définition des valeurs critiques et des points critiques d'un faisceau et d'une application qui, sous une forme améliorée, est à la base du présent développement (cf. Fáy [1], p. 688, (6)–(10), et Critère 4 du n° 8).

VII. Ce mémoire est la première partie d'une Thèse, dont la seconde partie va paraître dans ces mêmes "Annals". M. Jean Leray a lu une première rédaction de cette Thèse, qui contenait des résultats ne figurant pas dans la présente rédaction. Il a su discerner ce qui était relativement utile dans la première rédaction, et y apporter d'importants perfectionnements. Je lui dois, entre

autres: la présente définition des faisceaux ponctuellement isomorphes; la distinction nette (9), (10) du n° 3; la preuve du Théorème 2 du n° 3; l'extension du Théorème A au cas, où (2) est une suite infinie, et une simplification dans sa preuve importante dans l'étude des invariants de (5), (6); le Théorème 2 du n° 10.

Je tiens à exprimer ma profonde gratitude à M. Henri Cartan qui m'a permis d'assister à son Séminaire. Ma reconnaissance va également à M. Arnaud Denjoy qui a bien voulu présider le jury auquel j'ai soumis cette Thèse.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. SUR LA STRUCTURE DES FAISCEAUX

1. Faisceaux.....	442
2. Faisceaux ponctuellement isomorphes.....	445
3. Ensembles critiques d'un faisceau.....	449
4. Faisceaux de type fini.....	454

CHAPITRE 2. COHOMOLOGIE D'UN ESPACE

5. Couvertures.....	457
6. Algèbre de cohomologie par rapport à un faisceau.....	460
7. Sur le calcul de $H(X, \alpha)$	465

CHAPITRE 3. COHOMOLOGIE D'UNE APPLICATION

8. Application de type d'homologie simple.....	470
9. Rappel de la construction des algèbres spectrales d'une application... ..	476
10. Algèbres spectrales des applications de type d'homologie simple.....	479

CHAPITRE 1. SUR LA STRUCTURE DES FAISCEAUX

1. Faisceaux

La notion de coefficients locaux est classique en Topologie algébrique. Poincaré, puis Picard, Simart et S. Lefschetz étudient la "variation des cycles" avant 1924 (v. Lefschetz [1]); K. Reidemeister introduit plus tard des systèmes de coefficients locaux; N. E. Steenrod définit des groupes de cohomologie à coefficients locaux en toute généralité. J. Leray a généralisé cette notion classique en introduisant la notion de faisceau (Leray [1], p. 1366).

Dans le présent n° nous rappelons la définition de J. Leray, et donnons quelques notions qui s'y rattachent; pour ce qui suit v. Leray ([4], pp. 43-47, et pp. 124-133).

Avant de rappeler la définition des faisceaux, donnons la construction du *faisceau image* $\mathfrak{F}$ d'une application continue $f: X \rightarrow Y$. Attachons à chaque fermé E de l'espace Y l'algèbre de cohomologie $H(f^{-1}E)$ (v. Introduction, II.3). Notons $\mathfrak{F}$ cette loi $E \rightarrow H(f^{-1}E)$:

$$(1) \quad \mathfrak{F}(E) = H(f^{-1}E) \quad (E: \text{fermé de } Y).$$

Les données (1) ont les propriétés suivantes: Si F est un fermé de E , la section $H(f^{-1}E) \rightarrow H(f^{-1}F)$ est un homomorphisme

$$(2) \quad \mathfrak{F}(E) \rightarrow \mathfrak{F}(F) \quad (F: \text{fermé de } E);$$

si $E \supset F \supset G$, le diagramme $\mathfrak{F}(E) \rightarrow \mathfrak{F}(F) \rightarrow \mathfrak{F}(G)$ est transitif. Si V parcourt les voisinages fermés de E

$$(3) \quad \mathfrak{F}(E) = \varinjlim \mathfrak{F}(V) \quad (V: \text{voisinage fermé de } E)$$

où $\varinjlim$ désigne la limite directe.

Dans la définition de la notion de faisceau ces propriétés de $\mathfrak{F}$ sont les axiomes; on y introduit une notation analogue à celle des sections des algèbres de cohomologie (cf. Introduction, II.3). Cette définition est un exemple de la "généralisation par condensation": Même si l'on veut étudier le faisceau $\mathfrak{F}$ seulement, on doit considérer d'autres faisceaux, c'est-à-dire se servir d'une notion axiomatique généralisant la construction de $\mathfrak{F}$.

DÉFINITION 1. Un faisceau α défini sur l'espace X est une loi, qui associe à tout fermé E de X une algèbre $\alpha(E)$, et à tout couple $E \supset F$ de fermés emboîtés un homomorphisme $\alpha(E) \rightarrow \alpha(F)$ dit section et noté F , tel que $G\alpha = G(F\alpha)$, si $\alpha \in \alpha(E)$, et $E \supset F \supset G$. Ces données doivent satisfaire aux conditions dites de continuité que voici:

- (4) si $\alpha \in \alpha(E)$, il existe un voisinage fermé V de E dans X , et un $b \in \alpha(V)$, tels que $\alpha = Eb$;
 (5) si $\alpha \in \alpha(E)$, $E \supset F$, et $F\alpha = 0$, il existe un voisinage fermé W de F dans E , tel que $W\alpha = 0$.

La notion d'homomorphisme

$$(6) \quad \varphi: \alpha \rightarrow \beta$$

d'un faisceau α défini sur X dans un faisceau β défini sur le même espace X s'introduit naturellement: (6) est une famille d'homomorphismes

$$(7) \quad \varphi_E: \alpha(E) \rightarrow \beta(E),$$

telle que $F\varphi_E(\alpha) = \varphi_F(F\alpha)$ ($\alpha \in \alpha(E)$, $E \supset F$); pour alléger les notations nous écrivons parfois φ au lieu de φ_E . Deux faisceaux α et β sont appelés isomorphes, $\alpha \approx \beta$, s'il existe (6) et $\psi: \beta \rightarrow \alpha$ tels que $\varphi_F\psi_F$ et $\psi_F\varphi_F$ soient des identités pour tout F . Il est à noter que dans le présent chapitre on pourrait identifier des faisceaux isomorphes, mais nous ne le ferons pas, car dans le n° 6 nous avons besoin des faisceaux, et non pas des faisceaux définis à un automorphisme près.

Dans les définitions suivantes nous envisageons uniquement des faisceaux définis sur un même espace X . Nous disons que β est un sous-faisceau de α , et nous écrivons $\beta \subset \alpha$, si $\beta(E)$ est un idéal de $\alpha(E)$ pour tout E , les sections de β étant les restrictions de celles de α (nous pouvons donc utiliser les notations $F: \alpha(E) \rightarrow \alpha(F)$, $F: \beta(E) \rightarrow \beta(F)$). Il est parfois nécessaire d'envisager des sous-faisceaux au sens additif ($\beta(E)$ est un sous-module de $\alpha(E)$). Le faisceau quotient est noté α/β ; il est muni de la multiplication induite par celle de α . Nous

parlerons des sommes $\sum \alpha_i$ de sous-faisceaux α_i de α , des sommes directes, et des intersections $\cap \alpha_i$.

Définissons la restriction $\alpha|Y$ du faisceau α défini dans X à un sous-espace localement compact Y de X : $\alpha|Y$ est défini sur Y

$$(8) \quad (\alpha|Y)(E) = \alpha(E), \quad \text{si } E \subset Y, \quad \text{et } E \text{ est fermé dans } X,$$

et ou bien (9), ou bien (10) ci-dessous est valable:

$$(9) \quad (\alpha|Y)(E) = \alpha(\bar{E}), \quad \bar{E} \text{ est l'adhérence de } E \subset Y \text{ dans } X$$

$$(10) \quad (\alpha|Y)(E) = 0, \quad \text{si } E \subset Y, \quad \bar{E} \not\subset Y.$$

Dans la pratique nous pouvons faire abstraction du choix (9), (10), car nous utiliserons seulement le fait que

$$(11) \quad (\alpha|Y)(E) = \alpha(E) \quad \text{pour tout compact } E \text{ de } Y.$$

Envisageons le tableau suivant:

$$(12) \quad \begin{array}{ccc} \alpha & & f\alpha \\ f^{-1}\mathfrak{B} & & \mathfrak{B} \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

où X , Y sont des espaces, f est une application continue, α est un faisceau donné sur X , $\mathfrak{B}$ un faisceau donné sur Y , et $f\alpha$, $f^{-1}\mathfrak{B}$ seront construits à partir de ces données.

Si X est compact, ou f est fermée, la donnée de $\mathfrak{B}$ permet de définir un faisceau $f^{-1}\mathfrak{B}$ sur X en convenant:

$$(13) \quad \begin{aligned} (f^{-1}\mathfrak{B})(E) &= \mathfrak{B}(fE) \\ F: (f^{-1}\mathfrak{B})(E) &\rightarrow (f^{-1}\mathfrak{B})(F) \quad \text{est} \quad fF: \mathfrak{B}(fE) \rightarrow \mathfrak{B}(fF). \end{aligned}$$

Cette définition généralise (8), et on retrouve dans sa définition les difficultés de tout à l'heure.

On peut définir en toute généralité le faisceau $f\alpha$:

$$(14) \quad \begin{aligned} (f\alpha)(E) &= \alpha(f^{-1}E) \quad \text{pour tout fermé } E \text{ de } Y \\ F: (f\alpha)(E) &\rightarrow (f\alpha)(F) \quad \text{est} \quad f^{-1}F: \alpha(f^{-1}E) \rightarrow \alpha(f^{-1}F). \end{aligned}$$

Cette définition est importante dans la suite.

Rappelons à présent les définitions de trois types particuliers de faisceaux. Dans la théorie de J. Leray les *faisceaux constants* jouent le même rôle que l'anneau des coefficients dans les autres théories:

DÉFINITION 2. Un faisceau est dit constant, si toutes ses sections sont des identités.

Un tel faisceau $\mathfrak{C}$ attache donc à tout fermé la même algèbre C , et la section $\mathfrak{C}(E) \rightarrow \mathfrak{C}(F)$ est l'identité de C .

Les coefficients locaux des autres théories sont remplacés par les *faisceaux localement constants*:

DÉFINITION 3. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau défini sur X . Nous disons que $\mathcal{A}$ est localement constant, si X est localement connexe, et il possède un recouvrement ouvert $\rho = \{U\}$, tel que $\mathcal{A}|_{\bar{U}}$ est un faisceau constant quel que soit $U \in \rho$.

Utilisons les notations de cette définition. Comme X est localement connexe (Bourbaki [2], p. 53), les composantes connexes des ouverts sont, eux aussi, des ouverts. On peut donc supposer que les $U \in \rho$ sont connexes. Les composantes connexes du nerf du recouvrement ρ déterminent une partition de X en parties X_α , X_α ouvert et fermé dans X , telle que, si x décrit X_α , les algèbres $\mathcal{A}(x)$ sont toutes isomorphes à une même algèbre. Si $\alpha \neq \beta$, $x_\alpha \in X_\alpha$, $x_\beta \in X_\beta$, alors $\mathcal{A}(x_\alpha)$ et $\mathcal{A}(x_\beta)$ peuvent être différents. Le faisceau $\mathcal{A}$ est complètement déterminé par les $\mathcal{A}|_{X_\alpha}$ sur les "petits ensembles".

Dans ce qui suit supposons X connexe. Selon Leray ([4] pp. 124-133) on peut alors définir le groupe fondamental $\pi_1(X, x)$ ($x \in X$) muni d'une topologie. Selon l.c. ce groupe opère dans $\mathcal{A}(x)$. Réciproquement: la donnée d'un homomorphisme de $\pi_1(X, x)$ dans le groupe d'automorphismes d'une algèbre A_x définit un faisceau localement constant $\mathcal{A}$ dans X , tel que $\mathcal{A}(x) \approx A_x$, et que les opérations de $\pi_1(X, x)$ dans $\mathcal{A}(x)$ correspondent aux opérations données dans A_x . Si X est localement connexe par arcs, et localement simplement connexe, nous retrouvons ainsi les coefficients locaux au sens de Steenrod ([1], p. 151).

La définition suivante va être généralisée plus tard (cf. Définition 2 du n° 6):

DÉFINITION 4. Les données suivantes définissent un faisceau $\mathcal{H} = \mathcal{H}_X$ sur X :

$$(15) \quad \begin{aligned} \mathcal{H}(E) &= H(E) && (\text{algèbre de cohomologie de } E) \\ \mathcal{H}(E) \rightarrow \mathcal{H}(F) &\text{ est la section } H(E) \rightarrow H(F). \end{aligned}$$

$\mathcal{H}_X$ est appelé faisceau de cohomologie de X .

Le faisceau $\mathcal{F}$ de (1) peut être à présent défini comme l'image par f du faisceau de cohomologie de X (cf. (14), (15)):

DÉFINITION 5. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue. Nous appelons *faisceau image*, et nous notons $\mathcal{F}$, l'image $f\mathcal{H}_X$ du faisceau de cohomologie $\mathcal{H}_X$ de X .

Pour justifier ces définitions il faut vérifier (4), (5) (v. la justification de la Définition 2 du n° 6).

2. Faisceaux ponctuellement isomorphes

L'isomorphie ponctuelle des faisceaux joue un rôle important dans la suite. La définition de cette notion est suggérée par les travaux de H. Cartan (v. Cartan [1]-[4]).

Introduisons d'abord selon H. Cartan la notion de *support* d'un élément d'un faisceau (cf. Définition 1 du n° 5): Soit $\mathcal{A}$ un faisceau défini sur l'espace X . Si $a \in \mathcal{A}(F)$, où F est un fermé de X , nous posons $S(a) = \{x: x \in F, xa \neq 0\}$, et nous appelons $S(a)$ support de a . L'ensemble des points x de F , tels que $xa = 0$ est un ouvert de F selon la condition de continuité (5) du n° 1, donc $S(a)$ est

un fermé. Il est évident que $S(\alpha a + \beta b) \subset S(a) \cup S(b)$, $S(ab) \subset S(a) \cap S(b)$, où $a, b \in \mathcal{A}(F)$, $\alpha, \beta \in A$. Les éléments à support vide constituent un sous-faisceau $\mathfrak{J}$ de $\mathcal{A}$. Dans le faisceau quotient $\mathcal{A}' = \mathcal{A}/\mathfrak{J}$ l'équation $S(a') = \emptyset$, $a' \in \mathcal{A}'(F)$, implique $a' = 0$. Un faisceau ayant cette propriété est appelé *séparé*; nous disons que $\mathcal{A}'$ est le *faisceau séparé attaché* à $\mathcal{A}$.

Soit σ une loi, qui associe à tout $x \in F$ un $\sigma(x) \in \mathcal{A}(x)$, où F est un fermé donné de X . Selon H. Cartan¹ nous disons que σ est un *système cohérent* de $\mathcal{A}$ dans F , si

- (1) à tout $x \in F$ on peut trouver un voisinage fermé V , et un $a \in \mathcal{A}(V)$, tels que $\sigma(y) = ya$ en tout point $y \in V \cap F$.

Le support $S(\sigma)$ de σ est l'ensemble des points x de F , tels que $\sigma(x) \neq 0$; c'est un fermé de F , vu (1).

L'ensemble des systèmes cohérents définis dans F constitue une algèbre, si nous convenons

$$\begin{aligned} (\sigma_1 + \sigma_2)(x) &= \sigma_1(x) + \sigma_2(x) \\ (\sigma_1 \sigma_2)(x) &= \sigma_1(x) \cdot \sigma_2(x), \quad (\alpha \sigma)(x) = \alpha \cdot \sigma(x) \quad (\alpha \in A) \end{aligned}$$

pour définir sommes et produits. Nous verrons au n° 6 l'intérêt de cette construction: l'algèbre des systèmes cohérents à supports compacts définis dans tout X est précisément $H^0(X, \mathcal{A})$. Cette remarque motive la terminologie de la

PROPOSITION 1. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau défini dans X . On obtient un faisceau $\mathcal{C}$ dans X par les conventions suivantes: Attachons à chaque fermé E de X l'algèbre des systèmes cohérents σ de $\mathcal{A}$ définis dans E et tels que $S(\sigma)$ est compact; notons $\mathcal{C}(E)$ cette algèbre. Si F est un fermé de E , notons $F\sigma$ la restriction de σ à F ; cela définit un homomorphisme $\mathcal{C}(E) \rightarrow \mathcal{C}(F)$. Le faisceau $\mathcal{C}$ ainsi obtenu est appelé *faisceau de cohomologie de degré 0* de $\mathcal{A}$. Nous définissons un homomorphisme

$$(2) \quad \varphi: \mathcal{A} \rightarrow \mathcal{C}$$

en posant

$$(3) \quad \sigma = \varphi(a), \quad \text{si} \quad \sigma(x) = xa \quad \text{pour tout} \quad x \in F \quad (a \in \mathcal{A}(F)).$$

L'homomorphisme de faisceaux (2) est un isomorphisme

$$(4) \quad \varphi_x: \mathcal{A}(x) \approx \mathcal{C}(x)$$

en tout point x de X . Son noyau est donc le sous-faisceau des éléments à support vide. D'où:

$$(5) \quad \text{si } \mathcal{A} \text{ est séparé, } \varphi \text{ est une inclusion } \mathcal{A} \subset \mathcal{C}.$$

Le faisceau $\mathcal{C}$ est toujours séparé.

La preuve de cette proposition (due à H. Cartan) est une série de vérifications évidentes; on utilise constamment les conditions de continuité (1) et (4), (5) du n° 1.

¹ Dans Cartan [3], [4] σ est appelé "section"; nous reprenons ici l'ancienne terminologie de Cartan [1], Exposé XIII, p. 5.

PROPOSITION 2. *Si $\mathcal{B}$ est un sous-faisceau de $\mathcal{A}$, tel que $\mathcal{B}(x) = \mathcal{A}(x)$ en tout point x de X , alors les faisceaux de cohomologie de degré nul de $\mathcal{B}$ et de $\mathcal{A}$ sont identiques.*

PREUVE. Notons $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ les faisceaux de cohomologie de degré 0 de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement. On a $\mathcal{C}_B \subset \mathcal{C}_A$ selon la définition même de ces faisceaux; vu l'hypothèse, $\mathcal{C}_B(x) = \mathcal{C}_A(x)$ en tout point $x \in X$. Si σ est un système cohérent de $\mathcal{A}$ dans F , c'est une application $F \rightarrow \bigcup \mathcal{B}(x)$; pour montrer qu'il est un système cohérent de $\mathcal{B}$ il suffit donc de vérifier (1). Comme σ satisfait à cette relation dans $\mathcal{A}$, nous pouvons utiliser V , $a \in \mathcal{A}(V)$ de (1). Or, $xa \in \mathcal{B}(x) (= \mathcal{A}(x))$, il existe donc un voisinage fermé W de x , et $b \in \mathcal{B}(W)$, tels que $yb = ya = \sigma(y)$ pour les y près de x (cf. (4), (5) du n° 1). Cela prouve que σ est un système cohérent de $\mathcal{B}$, d'où la proposition.

COROLLAIRE 1. *Soit $\mathcal{C}$ le faisceau de cohomologie de degré nul d'un faisceau. Le faisceau de cohomologie de degré nul de $\mathcal{C}$ est $\mathcal{C}$ lui-même.*

Cela étant, nous posons une définition importante pour ce qui suit (v. Définition 1, et Corollaire 2 du n° 3; cf., en outre, le théorème fondamental de J. Leray cité dans le n° 6):

DÉFINITION 1. *Soient $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ des faisceaux définis sur un même espace X ; notons $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ les faisceaux de cohomologie de degré nul de $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement. Nous disons que $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont ponctuellement isomorphes, si $\mathcal{C}_A$, $\mathcal{C}_B$ sont isomorphes.*

C'est évidemment une relation d'équivalence dans la famille des faisceaux définis sur un même espace X . Donnons quelques exemples de faisceaux ponctuellement isomorphes: Chaque faisceau est ponctuellement isomorphe à son faisceau séparé associé. Si $\mathcal{A}$ est un faisceau quelconque, nous obtenons un faisceau ponctuellement isomorphe $\mathcal{B}$ en convenant: $\mathcal{B}(F) = \mathcal{A}(F)$, si F est compact, sinon $\mathcal{B}(F) = 0$. Le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}_X$ de l'espace X (Définition 4 du n° 1) est ponctuellement isomorphe au faisceau constant $\approx A$. Ces affirmations découlent immédiatement de la

PROPOSITION 3. *Pour que les faisceaux $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ définis sur le même espace X soient ponctuellement isomorphes, il faut et il suffit qu'il existe un faisceau $\mathcal{D}$ et des homomorphismes*

$$(6) \quad \mathcal{A} \xrightarrow{\varphi} \mathcal{D} \xleftarrow{\psi} \mathcal{B}$$

tels que $\varphi: \mathcal{A}(x) \approx \mathcal{D}(x)$ et $\psi: \mathcal{B}(x) \approx \mathcal{D}(x)$ soit valable en tout point x de X .

PREUVE. Si $\mathcal{A}$ et $\mathcal{B}$ sont ponctuellement isomorphes, le faisceau de cohomologie de degré nul de ces faisceaux est le même faisceau $\mathcal{D}$ (à une isomorphie près), d'où la nécessité des conditions énoncées (cf. (2), (4)).

Supposons que $\mathcal{D}$, φ , ψ existent, et ont les propriétés énumérées dans la proposition. Le noyau de φ (de ψ) est le sous-faisceau de $\mathcal{A}$ (de $\mathcal{B}$) que constituent les éléments à supports vides. Donc, si $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ sont les faisceaux séparés associés à $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ respectivement, $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$ sont inclus dans $\mathcal{D}$ à une isomorphie près. Selon la Proposition 2 les faisceaux de cohomologie de degré nul de $\mathcal{A}'$, $\mathcal{B}'$, $\mathcal{D}$ sont identiques. $\mathcal{A}$, $\mathcal{B}$ sont donc ponctuellement isomorphes. Cela complète la preuve de la Proposition 3.

On peut donner d'autres critères d'isomorphie ponctuelle de faisceaux: $\mathcal{A}$ et

$\mathfrak{B}$ sont ponctuellement isomorphes, s'ils contiennent un même sous-faisceau $\mathfrak{E}$ tel que $\mathfrak{E}(x) = \mathfrak{A}(x) = \mathfrak{B}(x)$ en tout point.

PROPOSITION 4. *Soient $\mathfrak{A}, \mathfrak{B}$ des faisceaux ponctuellement isomorphes définis sur l'espace X . Si Y est un sous-espace localement compact de X , les faisceaux $\mathfrak{A}|_Y, \mathfrak{B}|_Y$ sont ponctuellement isomorphes (indépendamment du choix de l'une des conventions (9), (10) du n° 1).*

Grâce à cette proposition, corollaire banal de (11) du n° 1, nous pouvons donc parler de l'isomorphie ponctuelle des restrictions de faisceaux sans ambiguïté.

Dans les n°s ultérieurs nous aurons souvent affaire à des faisceaux ponctuellement isomorphes à des faisceaux localement constants. L'intérêt de ces faisceaux vient du fait qu'ils s'introduisent naturellement dans l'étude de la structure des faisceaux, et que dans les calculs ils peuvent être remplacés par des faisceaux localement constants.

DÉFINITION 2. *Un faisceau $\mathfrak{A}$ défini dans un espace localement connexe est dit ponctuellement constant, s'il est ponctuellement isomorphe à un faisceau localement constant.*

Explicitons cette définition. Soit $\mathfrak{A}$ un faisceau donné sur l'espace X . Si X n'est pas localement connexe, $\mathfrak{A}$ ne peut pas être ponctuellement constant, car les faisceaux localement constants ont été définis sur les *espaces localement connexes* seulement, d'où la restriction concernant l'espace dans la définition précédente. Supposons donc X localement connexe, et formons le faisceau de cohomologie de degré nul $\mathfrak{C}$ de $\mathfrak{A}$. Pour que $\mathfrak{A}$ soit ponctuellement constant, il faut et il suffit que $\mathfrak{C}$ contienne un *sous-faisceau localement constant* $\mathfrak{B}$ tel que $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{C}(x)$ en tout point x de X . En effet, $\mathfrak{C}$ contient tous les faisceaux séparés ponctuellement isomorphes à $\mathfrak{A}$ (v. (5)). On peut donc trouver un recouvrement ρ de X par des ouverts connexes U ayant les propriétés suivantes: Si $U \in \rho$ il existe une algèbre $\mathfrak{B}(\bar{U})$ de systèmes cohérents de $\mathfrak{A}$ définis dans $\bar{U}$, tels que $\sigma \rightarrow \sigma(x)$ est une isomorphie entre $\mathfrak{B}(\bar{U})$ et $\mathfrak{A}(x)$ en tout point x de $\bar{U}$. Retenons le

CRITÈRE 1. *Pour qu'un faisceau soit ponctuellement constant, il faut et il suffit que son faisceau de cohomologie de degré nul $\mathfrak{C}$ contienne un sous faisceau LOCALEMENT CONSTANT $\mathfrak{B}$, tel que $\mathfrak{B}(x) = \mathfrak{C}(x)$ en tout point x .*

DIGRESSION. Les remarques ci-dessous ont pour but de comparer les notions rappelées à celles de Cartan [4]; elles ne seront pas utilisées dans la suite.

Un faisceau au sens de Cartan [4] est, grosso modo, une classe de faisceaux. Dans le présent mémoire nous ne pouvons pas utiliser les faisceaux de Cartan [4], car on ne peut pas définir l'image directe de ceux-ci par une application continue. C'est pourtant une notion indispensable pour nous: la preuve du Théorème A de l'Introduction s'appuie sur cette notion.

Selon H. Cartan la classe des faisceaux ponctuellement isomorphes à un faisceau $\mathfrak{A}$ peut être caractérisée par un espace topologique, à *topologie non séparée*, portant une structure particulière.

Rappelons la construction de cet espace, et de sa structure. Soit

$$(7) \quad \mathfrak{A} = \bigcup_{x \in X} \mathfrak{A}(x)$$

où α est un faisceau défini dans X . Définissons l'application

$$(8) \quad p: \mathfrak{A} \rightarrow X$$

en faisant correspondre à $a \in \alpha(x)$ le point x .

Donnons nous $a \in \alpha(x)$, un voisinage fermé V de x , et un $\bar{a} \in \alpha(V)$, tels que $x\bar{a} = a$. Posons:

$$(9) \quad \mathfrak{B}_a = \{a_y: a_y \in \alpha(y), y \in V, a_y = y\bar{a}\}.$$

Les ensembles $\mathfrak{B}_a \subset \mathfrak{A}$ constituent par définition un système fondamental de voisinages de $a \in \mathfrak{A}$.

Notons que la restriction de p à $\mathfrak{B}_a$ est une homéomorphie.

Le système $(\mathfrak{A}, X, p)$, où $\mathfrak{A}$ est un espace topologique *non séparé*, X est un espace localement compact, et p est l'application (8) a les propriétés suivantes:

1° $p^{-1}(x)$ est une algèbre pour tout $x \in X$;

2° α . Il existe une loi de composition non partout définie dans $\mathfrak{A}$: $(a_x, b_x) \rightarrow a_x - b_x$, où $a_x, b_x \in p^{-1}(x)$, qui est une application *continue* d'une partie de $\mathfrak{A} \times \mathfrak{A}$ dans $\mathfrak{A}$. β . p est une homéomorphie locale. (Tout élément de $\mathfrak{A}$ possède un voisinage que p applique biunivoquement et bicontinûment *sur* un voisinage de son image.)

Cartan [3], [4] pose ces propriétés comme axiomes de la notion de faisceau (en réalité, dans la définition de H. Cartan² X n'est pas supposé localement compact).

Étant donné un faisceau $(\mathfrak{A}, X, p)$ au sens de Cartan [4], nous allons construire un faisceau α tel que l'espace associé (7), (9) soit $\mathfrak{A}$, et que (8) soit la p donnée.

Soit E un fermé de X , et notons $\alpha(E)$ la famille de parties σ de $\mathfrak{A}$, telles que: 1° $p(\sigma) = E$; 2° $p|_{\sigma}$ est une homéomorphie. Si F est un fermé de E , $\sigma \in \alpha(E)$, posons $F\sigma = \sigma \cap p^{-1}(F)$, ce qui définit une application $\alpha(E) \rightarrow \alpha(F)$. Définissons une addition dans $\alpha(E)$: si $\sigma_1, \sigma_2 \in \alpha(E)$, soit σ l'ensemble des points de la forme $\sigma_1(x) + \sigma_2(x)$, $x \in E$, de l'espace $\mathfrak{A}$. On peut de même définir la multiplication, et prouver que ces données $\alpha(E)$, $\alpha(E) \rightarrow \alpha(F)$, constituent un faisceau. Cela posé, on peut contrôler que la topologie (9) de l'ensemble (7) donne bien l'espace $\mathfrak{A}$, et que p est continue. La preuve de l'affirmation est donc complète.

3. Ensembles critiques d'un faisceau

L'introduction de cette notion sera justifiée par le rapport que nous allons établir entre valeur critique d'une application et point critique de son faisceau image (v. n° 8). Dans le présent n° nous verrons que, dans le cas favorable, cette notion est utile dans la description de la structure d'un faisceau.

DÉFINITION 1. α étant un faisceau défini sur l'espace X , un point $x \in X$ sera dit point non critique du faisceau α , si x possède un voisinage fermé V , tel que la restriction $\alpha|_V$ soit ponctuellement isomorphe à un faisceau constant; les autres points sont dits critiques.

Pour alléger l'exposé nous disons parfois que α est non critique (ou qu'il est

² Selon Cartan [4], p. 41, (1), cette définition est due à M. Lazard.

critique) au point x . L'ensemble des points non critiques est un ouvert de l'espace; il peut être vide, bien entendu.

Si l'espace X est localement connexe, et $\mathcal{A}$, défini dans X , est non critique au point x , ce dernier possède un voisinage V , tel que $\mathcal{A} \mid V$ soit ponctuellement constant. Mais la définition précédente est plus générale: on peut parler des points non critiques d'un faisceau défini dans un espace localement non connexe. Ce fait est important:

PROPOSITION 1. *Soit $\mathcal{A}$ défini dans l'espace X . Si Y est un sous-espace localement compact de X , et si $\mathcal{A}$ est non critique en $y \in Y$, alors sa restriction $\mathcal{A} \mid Y$ est non critique, elle aussi, en y .*

La preuve de la proposition est banale: cf. Proposition 4 du n° 2.

Dans les n°s ultérieurs nous allons voir l'utilité de la construction suivante (cf., en outre, l'Introduction, III.2): Soit X_1 l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A}$. Si $X_1 \neq X$, les faisceaux $\mathcal{A}$ et $\mathcal{A} \mid X_1$ sont distincts, et il se peut qu'un point $x \in X_1$, qui est un point critique de $\mathcal{A}$, soit un point non critique de $\mathcal{A} \mid X_1$. Dans ce cas on peut envisager l'ensemble X_2 des points critiques de $\mathcal{A} \mid X_1$, et l'appeler second ensemble critique de $\mathcal{A}$, et ainsi de suite. De façon précise nous avons la

CONSTRUCTION. *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau dans l'espace X . Construisons le α -ième ensemble critique de $\mathcal{A}$, où α est un nombre ordinal fini ou transfini, comme suit: Convenons $X_0 = X$. Si X_α a déjà été défini ($\alpha \geq 0$), nous notons $X_{\alpha+1}$ l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A} \mid X_\alpha$. Si ω est un nombre limite, nous posons $X_\omega = \bigcap X_\nu$, où ν parcourt les nombres $< \omega$.*

Cette construction attache à tout nombre ordinal α une partie fermée X_α de X ; dans ce qui suit nous envisageons le début de cette suite, où les espaces sont distincts, ce qui est possible, vu la

PROPOSITION 2. *Quel que soit le faisceau $\mathcal{A}$ défini dans X , il existe un plus petit ensemble critique X_Ω de $\mathcal{A}$, inclus dans tous les autres ensembles critiques, et tel que*

$$(1) \quad X_\alpha \neq X_\beta, \text{ si } 0 \leq \alpha < \beta \leq \Omega, \quad X_\gamma = X_\Omega, \quad \text{pour } \gamma \geq \Omega.$$

Deux cas peuvent se présenter:

$$(2) \quad X_\Omega = \emptyset, \text{ donc } \bigcap_\alpha X_\alpha = \emptyset,$$

$$(3) \quad X_\Omega \neq \emptyset, \text{ donc } \bigcap_\alpha X_\alpha \neq \emptyset,$$

donc le premier est appelé cas favorable.

Cette proposition, dont la preuve est banale, justifie la

DÉFINITION 2. *Si $\mathcal{A}$ est un faisceau défini dans X , la Construction ci-dessus attache à $\mathcal{A}$ une suite*

$$(4) \quad X_0 \supset X_1 \supset \dots \supset X_\omega \supset \dots \supset X_\Omega \quad (X_0 = X; X_\alpha \neq X_\beta)$$

de fermés distincts de X , dits ensembles critiques de $\mathcal{A}$. X_α est appelé α -ième, X_Ω dernier ou plus petit ensemble critique de $\mathcal{A}$.

L'opération de restriction des faisceaux diminue les ensembles critiques. De façon précise, on a la

PROPOSITION 3. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau quelconque dans X , et les X_α dans (4) ses ensembles critiques. Si U est un ouvert de X , les ensembles critiques de $\mathcal{A} \mid U$ sont les fermés $X_\alpha \cap U$ de U , où α parcourt tous les indices $\leq \Omega$, pour lesquels cette intersection est non vide, et le premier indice ω , telle que $X_\omega \cap U = \emptyset$, le cas échéant. Si F est un fermé de X , les ensembles critiques de $\mathcal{A} \mid F$ sont inclus dans les $X_\alpha \cap F$.

Cette proposition, dont la preuve est banale, implique que les ensembles critiques de $\mathcal{A} \mid Y$ sont inclus dans ceux de $\mathcal{A}$, si Y est un sous-espace localement compact quelconque de X . En effet, Y est un ouvert de $\tilde{Y}$, il existe donc un ouvert U de X , tel que $Y = \tilde{Y} \cap U$, et on peut prendre d'abord $\mathcal{A} \mid U$, et ensuite la restriction de $\mathcal{A} \mid U$ à $\tilde{Y} \cap U$.

PROPOSITION 4. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau sur X , (4) la suite de ses ensembles critiques. Désignons par $X_{\alpha+1}^0$ l'ensemble des points intérieurs de $X_{\alpha+1}$ dans X_α ; posons $X_\omega^0 = \bigcup_{\nu < \omega} X_\nu^0$, si ω est un nombre limite. Les X_α^0 forment une suite croissant

$$(5) \quad X_1^0 \subset X_2^0 \subset \dots \subset X_\omega^0 \subset \dots \subset X_\Omega^0.$$

PREUVE. Supposons que X_1 contient un ouvert U de X , et prouvons

$$(6) \quad U \subset X_\alpha$$

pour tout $\alpha \geq 1$. Procédons par induction transfinie, et supposons (6) valable pour les $\alpha < \beta$ ($\beta \geq 2$). Si β est un nombre limite, $X_\beta = \bigcap X_\alpha$, $\alpha < \beta$, et (6) s'ensuit pour X_β . Sinon, $\beta = \alpha + 1$ pour un α , où $U \subset X_\alpha$. Or, $X_{\alpha+1}$ est l'ensemble des points critiques de $\mathcal{A} \mid X_\alpha$. Si $x \in U$, et $x \notin X_{\alpha+1}$, il existe un ouvert $V \subset U$, $x \in V$, tel que $(\mathcal{A} \mid X_\alpha) \mid V$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant. Or, $(\mathcal{A} \mid X_\alpha) \mid V = \mathcal{A} \mid V$, et c'est une contradiction, car $x \in V$ est un point critique de $\mathcal{A}$. Donc (6) est valable pour tout α . D'où $X_1^0 \subset X_\alpha$ pour tout $\alpha \geq 1$. En appliquant cette inégalité aux faisceaux $\mathcal{A} \mid X_\alpha$ nous obtenons (5), la preuve de la proposition est donc complète.

COROLLAIRE 1. Si le plus petit ensemble critique X_Ω du faisceau $\mathcal{A}$ est vide, X_β est rare dans X_α pour tout $\beta > \alpha$.

En effet, si X_β contient un point intérieur de X_α , ce point appartient à tout X_γ , $\gamma \geq \beta$, le plus petit ensemble critique est donc non vide, contrairement à l'hypothèse.

En particulier

$$(7) \quad \bigcap_{q=0}^{\infty} X_q = \emptyset,$$

entraîne que X_{q+1} est rare dans X_q pour tout entier q . La réciproque n'est pas vraie: il est facile de construire un faisceau $\mathcal{A}$ ayant une suite transfinie d'ensembles critiques, dont chacun est rare dans le précédent.

THÉOREME 1. Quel que soit le faisceau $\mathcal{A}$ défini dans X , la suite (4) de ses ensembles critiques détermine une décomposition

$$(8) \quad X = (\bigcup_{0 \leq \alpha < \Omega} (X_\alpha - X_{\alpha+1})) \cup X_\Omega$$

de l'espace X en sous-espaces localement compacts disjoints, et tels que

(9) $\alpha \mid (X_\alpha - X_{\alpha+1})$ est dépourvu de points critiques, $0 \leq \alpha < \Omega$,

(10) $\alpha \mid X_\Omega$ n'a que des points critiques.

PREUVE. $X = (X - X_\Omega) \cup X_\Omega$ est une partition de X au sens de Bourbaki, pourvu que ses termes ne soient pas vides (dans ce cas (8) est également une partition). Si $x \in X_1 - X_\Omega$, il existe un plus petit β tel que $x \notin X_\beta$; ce β est $= \alpha + 1$, car $x \in X_\nu$ pour tout $\nu < \beta$. Donc $x \in X_\alpha - X_{\alpha+1}$. Cela prouve que le second membre de (8) est X . La définition des X_α donne immédiatement (9), (10). Dans le cas favorable (cf (2)), α est dépourvu de points critiques sur chaque élément de la décomposition (8) de l'espace.

Les relations (8), (9) montrent qu'il est utile d'étudier les faisceaux dépourvus de points critiques. Le Théorème 2 ci-dessous éclaircit leur structure dans le cas où X est localement connexe. Les lemmes ci-dessous préparent la preuve de ce théorème.

LEMME 1. Soit α le faisceau de cohomologie de degré nul d'un autre faisceau défini dans X (cf. Proposition 1 du n° 2). Supposons X localement connexe, et α ponctuellement constant dans tout X (Définition 2 du n° 2). α contient des sous-faisceaux localement constants $\mathfrak{B}$ tels que

(11) $\mathfrak{B}(x) = \alpha(x)$ en tout point x de X ;

(12) $\mathfrak{B}(F) = 0$, sauf, si $F \subset E$, E compact, connexe, et tel que $\mathfrak{B}(E) \neq 0$.

Parmi les faisceaux $\mathfrak{B}$ ayant ces propriétés il y en a un MAXIMAL, dont tout autre est sous-faisceau, qui est donc UNIQUE.

PREUVE. Comme α est un faisceau de cohomologie de degré nul, il contient les faisceaux qui lui sont ponctuellement isomorphes; selon le Critère 1 du n° 2 α contient donc des sous-faisceaux localement constants $\mathfrak{B}'$ satisfaisant à (11). Nous allons modifier $\mathfrak{B}'$ de façon qu'il satisfasse à (11), (12). Soit $\rho = \{U\}$ un recouvrement de X par des ouverts connexes relativement compacts, tels que $\mathfrak{B}' \mid \bar{U}$ soit un faisceau constant pour tout $U \in \rho$. (Cf. les remarques après la Définition 3 du n° 1.) Posons: $\mathfrak{B}(F) = \mathfrak{B}'(F)$, si $F \subset U$, $U \in \rho$, et $\mathfrak{B}(F) = 0$, sinon; cela définit un sous-faisceau $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{B}'$, ayant les propriétés (11), (12).

Dans 1°, 2°, 3° nous prouvons l'unicité d'un tel $\mathfrak{B}$ maximal; les $\mathfrak{B}_\alpha$ désignent des sous-faisceaux de α satisfaisant à (11), (12).

1° Soit F un fermé connexe, tel que $\mathfrak{B}_1(F) \neq 0$, et $\mathfrak{B}_2(F) \neq 0$. Donnons nous $b_1 \in \mathfrak{B}_1(F)$ fixé dans ce qui suit, et un $b_2 \in \mathfrak{B}_2(F)$ variable. Les parties

(13) $\{x: x \in F, xb_1 = xb_2\}$

sont ouvertes, et constituent une partition de F . Or, celui-ci est connexe, donc les ensembles (13) sont tous vides, sauf l'un d'eux. A b_1 nous avons associé un b_2 , tel que $xb_2 = xb_1$ en tout point x de F . α étant séparé, $b_2 = b_1$, c'est-à-dire $\mathfrak{B}_1(F) \subset \mathfrak{B}_2(F)$. Nous pouvons répéter ce raisonnement, en échangeant les rôles de $\mathfrak{B}_1$, $\mathfrak{B}_2$, d'où:

(14) si F est connexe, et $\mathfrak{B}_1(F) \neq 0$, $\mathfrak{B}_2(F) \neq 0$, alors

$$\mathfrak{B}_1(F) = \mathfrak{B}_2(F).$$

2° Définissons un sous-faisceau $\mathfrak{B}_3$ de $\mathfrak{A}$ comme suit:

$$(15) \quad \mathfrak{B}_3(F) = \begin{cases} 0, & \text{si } \mathfrak{B}_1(F) = \mathfrak{B}_2(F) = 0 \\ \mathfrak{B}_1(F), & \text{si } \mathfrak{B}_1(F) \neq 0 \\ \mathfrak{B}_2(F), & \text{si } \mathfrak{B}_2(F) \neq 0. \end{cases} \quad F \text{ connexe}$$

Si E est un fermé quelconque, nous convenons

$$(16) \quad \mathfrak{B}_3(E) = \begin{cases} \mathfrak{B}_3(F), & \text{si } F \supset E, \text{ } F \text{ connexe et } \mathfrak{B}_3(F) \neq 0 \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

Vu (14) la définition (15) est licite. Cela posé, on peut convenir (16), car X est localement connexe. $\mathfrak{B}_1, \mathfrak{B}_2$ satisfont à (11), (12), donc $\mathfrak{B}_3 \supset \mathfrak{B}_1 + \mathfrak{B}_2$ a ces mêmes propriétés. L'existence de $\mathfrak{B}_3$ prouve:

(17) *L'ensemble des sous-faisceaux localement constants de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à (11), (12), ensemble ordonné par inclusion, a au plus un élément maximal.*

3°. Si $\{\mathfrak{B}_\alpha\}$ est une famille totalement ordonnée par inclusion, alors la réunion des $\mathfrak{B}_\alpha$ constitue un sous-faisceau localement constant $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}$ satisfaisant aux conditions (11), (12). En effet, si $\mathfrak{B}_\alpha \subset \mathfrak{B}_\beta$, alors ou bien $\mathfrak{B}_\alpha(F) = \mathfrak{B}_\beta(F)$, ou bien $\mathfrak{B}_\alpha(F) = 0, \mathfrak{B}_\beta(F) \neq 0$, quel que soit F . Cette propriété de la famille des faisceaux $\mathfrak{B}$ permet d'utiliser le Lemme de Zorn. Or, (17) prouve l'unicité du faisceau maximal $\mathfrak{B}$, ce qui achève la preuve du Lemme.

LEMME 2. *Utilisons les notations du Lemme 1, et soit $\mathfrak{B}$ le sous-faisceau localement constant maximal de $\mathfrak{A}$ satisfaisant à (11), (12). Quel que soit l'ouvert V de l'espace, $\mathfrak{B} \mid V$ est le sous-faisceau localement constant maximal de $\mathfrak{A} \mid V$ satisfaisant à (11), (12).*

PREUVE. Notons $\mathfrak{C}$ le sous-faisceau localement constant maximal de $\mathfrak{A} \mid V$ satisfaisant à (11), (12). Définissons:

$$\mathfrak{D}(F) = \begin{cases} \mathfrak{C}(F), & \text{si } F \subset V \\ \mathfrak{B}(F), & \text{sinon.} \end{cases}$$

$\mathfrak{B} \subset \mathfrak{D}$ et $\mathfrak{D}$ satisfait aux conditions (11), (12). Comme $\mathfrak{B}$ est maximal $\mathfrak{B} = \mathfrak{D}$, d'où le Lemme 2.

LEMME 3. *Soit $\mathfrak{A}$ un faisceau quelconque défini dans un espace localement connexe X . Si $\mathfrak{A} \mid V_i, i = 1, 2$, sont ponctuellement constants, où V_1, V_2 sont des ouverts de X , alors $\mathfrak{A} \mid (V_1 \cup V_2)$ est ponctuellement constant.*

PREUVE. Notons par $\mathfrak{A}'$ le faisceau des cohomologie de degré nul de $\mathfrak{A}$. Selon l'hypothèse $\mathfrak{A}' \mid V_i$ contient des sous-faisceaux localement constants $\mathfrak{B}_i$ tels que (11) soit valable; vu le Lemme 1, les faisceaux maximaux $\mathfrak{B}_i \subset \mathfrak{A}' \mid V_i$ sont uniques ($i = 1, 2$). Selon le Lemme 2 $\mathfrak{B}_1 \mid (V_1 \cap V_2) = \mathfrak{B}_2 \mid (V_1 \cap V_2)$. On peut donc définir un sous-faisceau $\mathfrak{B}$ de $\mathfrak{A}' \mid (V_1 \cup V_2)$, tel que $\mathfrak{B} \mid V_i = \mathfrak{B}_i, i = 1, 2$. L'existence du faisceau $\mathfrak{B}$ montre que $\mathfrak{A}$ est ponctuellement constant dans $V_1 \cup V_2$, d'où le Lemme 3.

LEMME 4. *Soit $\mathfrak{A}$ un faisceau quelconque défini dans un espace localement con-*

nexe X . Soit $\{V_\alpha\}$ une famille d'ouverts totalement ordonnée par inclusion, et posons $V = \bigcup V_\alpha$. Si $\mathcal{A} \mid V_\alpha$ est ponctuellement constant pour tout α , alors $\mathcal{A} \mid V$ l'est aussi.

PREUVE. Soit $\mathcal{B}_\alpha$ le sous-faisceau maximal de $\mathcal{A}' \mid V_\alpha$ satisfaisant à (11), (12), où $\mathcal{A}'$ est le faisceau de cohomologie de degré 0 de $\mathcal{A}$. Si $V_\alpha \subset V_\beta$, alors $\mathcal{B}_\beta \mid V_\alpha = \mathcal{B}_\alpha$ vu le Lemme 2. Il existe donc un sous-faisceau $\mathcal{B}$ de $\mathcal{A}'$, tel que $\mathcal{B} \mid V_\alpha = \mathcal{B}_\alpha$ pour tout α . Il est alors évident que $\mathcal{A} \mid V$ est ponctuellement constant.

THÉORÈME 2. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau quelconque défini dans un espace localement connexe X , et notons X_1 son premier ensemble critique. Le faisceau $\mathcal{A} \mid (X - X_1)$ est ponctuellement constant.

PREUVE. Si $\mathcal{A}$ possède un point non critique, il existe un ouvert V , tel que $\mathcal{A} \mid V$ est ponctuellement constant; nous pouvons faire cette hypothèse, car dans le cas contraire il n'y a rien à démontrer. Vu le Lemme 4, le Lemme de Zorn prouve l'existence d'un V maximal, tel que $\mathcal{A} \mid V$ soit ponctuellement constant. Grâce au Lemme 3 on peut affirmer que ce V est unique, et qu'il comprend tous les points non critiques de $\mathcal{A}$. Donc $V = X - X_1$, d'où le Théorème 2.

COROLLAIRE 2. Supposons que tous les ensembles critiques X_α du faisceau $\mathcal{A}$ sont localement connexes, et que le plus petit est vide ($\bigcap X_\alpha = \emptyset$). Dans ces conditions

$$X = \bigcup_\alpha (X_\alpha - X_{\alpha+1}) \text{ est une partition de } X;$$

$$\mathcal{A} \mid (X_\alpha - X_{\alpha+1}) \text{ est ponctuellement constant pour tout } \alpha.$$

4. Faisceaux de type fini

Ils seront définis par des conditions de finitude portant sur la structure algébrique et topologique: nous utiliserons la notion d'algèbre noethérienne,³ et celle de recouvrement fini en chaque point. Nous montrerons que le plus petit ensemble critique d'un tel faisceau est vide (Théorème 1 ci-dessous).

Soit ρ un recouvrement de l'espace X . Nous disons qu'il est fini en chaque point, si un point quelconque $x \in X$ est contenu dans un nombre fini d'éléments de ρ . Autrement dit: l'intersection d'une famille infinie d'éléments de ρ est vide. Cette condition n'entraîne pas que ρ est localement fini (tout point de X possède un voisinage rencontrant un nombre fini d'éléments du recouvrement); il n'est pas exclu qu'un élément de ρ contient une infinité d'autres éléments de ρ .⁴ Ces faits sont importants dans ce qui suit.

DÉFINITION 1. Un faisceau $\mathcal{A}$ défini dans l'espace X est dit de type fini, s'il a les propriétés suivantes. 1° Il existe une base d'ouverts $\beta = \{U\}$ de X , tel que $\mathcal{A}(\bar{U})$ est noethérien pour tout $U \in \beta$. 2° Il existe un recouvrement ouvert $\rho = \{V\}$ de X , les adhérences $\bar{V}$ constituant un recouvrement fini en chaque point, tel qu'à

³ Une algèbre est dite noethérienne, si chaque suite croissante d'idéaux est finie.

⁴ Dans un travail ultérieur (cf. Introduction, VI) nous envisageons le recouvrement ρ du plan de Cauchy C que voici. $\Gamma \subset C$ est un ensemble fini, et tout $\gamma \in \Gamma$ est le centre d'un disque $D_\gamma \in \rho$. Les autres éléments de ρ sont contenus dans $C - \Gamma$, et constituent un recouvrement localement fini de $C - \Gamma$. Ce recouvrement ρ de C est fini en chaque point, mais il n'est pas localement fini.

tout $x \in X$ on puisse trouver un (ouvert) $V \in \rho$ le contenant pour lequel $\alpha(x) = x\alpha(\bar{V})$.

Le théorème en vue découle facilement du

LEMME 1. Soit α un faisceau de type fini dans l'espace X . Dans tout compact F de X il existe une partie $V_F \subset F$, V_F ouvert dans F , tel que $\alpha|_{V_F}$ soit ponctuellement isomorphe à un faisceau constant.

PREUVE. Utilisons les notations β, ρ , etc. de la Définition 1. Prouvons qu'il existe une suite finie d'éléments de ρ , soit

$$(1) \quad V_1, \dots, V_k$$

telle que

$$(2) \quad F \cap V_1 \cap \dots \cap V_k \neq \emptyset$$

et que, si $V \in \rho$, et V ne figure pas dans (1), alors

$$(3) \quad V \cap (F \cap V_1 \cap \dots \cap V_k) = \emptyset.$$

En effet, si (1) n'existe pas, nous pouvons trouver une suite infinie $V_1, V_2, \dots$ d'éléments de ρ , telle que (2) soit valable pour tout entier k . Nous avons alors

$$(4) \quad F \cap \bar{V}_1 \cap \dots \cap \bar{V}_i \neq \emptyset$$

quel que soit l'entier i . Or, les ensembles (4) constituent une suite décroissante de compacts, il existe donc un $x \in X$ contenu dans une famille infinie d'éléments de $\bar{\rho} = \{\bar{V}\}$. Cette contradiction prouve l'existence de (1) ayant les propriétés (2), (3).

Choisissons un $U \in \beta$, tel que

$$(5) \quad U \subset V_1 \cap \dots \cap V_k$$

$$(6) \quad U_F = U \cap F \neq \emptyset.$$

Selon (3) nous avons alors

$$(7) \quad U_F \cap V = \emptyset$$

pour tout $V \in \rho$ n'appartenant pas à la suite (1).

Montrons que

$$(8) \quad \alpha(x) = x\alpha(\bar{U}_F)$$

pour tout $x \in \bar{U}_F$.

En effet, selon l'hypothèse 2° de la Définition 1, il existe un $V \in \rho$ tel que $\alpha(x) = x\alpha(\bar{V})$ soit valable. Or, (7) montre que ce V est de la suite (1), donc

$$(9) \quad \alpha(x) = x\alpha(\bar{V}_i)$$

pour un i convenablement choisi ($1 \leq i \leq k$). Or, $\bar{U}_F \subset \bar{V}_i$, donc

$$(10) \quad \alpha(x) = x\alpha(\bar{V}_i) = x\bar{U}_F\alpha(\bar{V}_i) \subset x\alpha(\bar{U}_F).$$

Cela prouve (8), car on a toujours $x\alpha(\bar{U}_F) \subset \alpha(x)$.

Désignons par N_x le noyau de la section

$$(11) \quad \tilde{U}_F \mathcal{Q}(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{Q}(x)$$

quand x varie dans U_F (ouvert de F); N_x ne soit pas défini pour les autres x .

La première algèbre de (11) est un quotient de $\mathcal{Q}(\tilde{U})$, donc noethérienne (cf. hypothèse 1° de la Définition 1). On peut alors choisir un point $y \in U_F$ de façon que N_y soit maximal, c'est-à-dire tel que

$$(12) \quad \text{si } N_x \supset N_y \ (x \in U_F), \text{ alors } N_x = N_y.$$

L'idéal N_y a un nombre fini de générateurs

$$(13) \quad a_1, \dots, a_l \quad (a_i \in \tilde{U}_F \mathcal{Q}(\tilde{U})).$$

On a

$$(14) \quad ya_i = 0, \quad i = 1, \dots, l.$$

On peut donc trouver un voisinage V_F de y dans F , tel que (14) continue d'être valable

$$(15) \quad xa_i = 0, \quad i = 1, \dots, l, \text{ pour tout } x \in V_F.$$

D'où $N_x \supset N_y$ pour ces x . Or, selon (12) cela implique que

$$(16) \quad \text{le noyau de (11) est } N_y \text{ pour tout } x \in V_F.$$

En résumant (8) et (16) nous avons obtenu:

$$(17) \quad \begin{array}{ll} \tilde{U}_F \mathcal{Q}(\tilde{U}) \rightarrow \mathcal{Q}(x) & \text{quand } x \in V_F. \\ \text{noyau } N_y & \text{image } \mathcal{Q}(x) \end{array}$$

Définissons le sous-faisceau $\mathcal{Q}_F$ de $\mathcal{Q} \mid V_F$ comme suit: $\mathcal{Q}_F(E) = E\mathcal{Q}(\tilde{U})$ pour chaque fermé $E \subset V_F$. Selon (17) $\mathcal{Q} \mid V_F$ est ponctuellement isomorphe à $\mathcal{Q}_F$, car $\mathcal{Q}(x) = \mathcal{Q}_F(x)$ en tout point $x \in V_F$. Le faisceau séparé associé à $\mathcal{Q}_F$ est un faisceau constant, car il attache au fermé $E \subset V_F$ l'algèbre $E\mathcal{Q}(\tilde{U})/EN_y$. Donc, $\mathcal{Q} \mid V_F$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant, ce qui prouve le Lemme 1.

THÉORÈME 1. *Si $\mathcal{Q}$ est un faisceau de type fini dans l'espace X , chaque ensemble critique X_α de $\mathcal{Q}$ est rare dans les précédents, et le plus petit ensemble critique est vide. Les $X_\alpha - X_{\alpha+1}$ constituent donc une partition de l'espace, telle que*

$$\mathcal{Q} \mid (X_\alpha - X_{\alpha+1})$$

est dépourvu de points critiques.

PREUVE. Supposons que le plus petit ensemble critique X_α est $\neq \emptyset$. Selon le Lemme 1 $\mathcal{Q} \mid X_\alpha$ possède des points non critiques, et selon (10) du n° 3 il n'en possède pas. Cette contradiction prouve que $X_\alpha = \emptyset$. Selon le Corollaire 1 du n° 3 X_β est un fermé rare de X_α , quel que soient α et β , $\alpha < \beta$. La preuve du théorème est donc complète.

CHAPITRE 2. COHOMOLOGIE D'UN ESPACE

5. Couvertures

Une des notions essentielles de la théorie de J. Leray est celle de *couverture* (*fine*) d'un espace. C'est une notion axiomatique de l'algèbre de cochaînes; dans sa définition la notion de *support* d'une cochaîne joue un rôle important, car elle permet d'éviter l'utilisation des chaînes.⁵ Cette axiomatique généralise les propriétés algébriques et géométriques de l'anneau des formes différentielles extérieures définies dans une variété différentiable; la multiplication ("cup product") y est important. Nous énoncerons une variante de la définition de notion de couverture, et généralisons légèrement ses propriétés fondamentales. Pour ce qui suit v. Leray [4]; les changements sont indiqués dans Fáy [6].

Rappelons d'abord quelques notions purement algébriques de la théorie de J. Leray.

Une structure algébrique (K, d) est appelée *algèbre canonique*, si K est une algèbre, si d , qu'on nomme différentielle, est une application linéaire $d: K \rightarrow K$, dont le carré dd est nul, et si les conditions suivantes sont remplies: le module additif de K est une somme directe

$$(1) \quad K = \sum_{p \geq 0} K^p$$

$$(2) \quad K^p K^q \subset K^{p+q}$$

$$(3) \quad dK^p \subset K^{p+1}$$

$$(4) \quad \text{si } a \in K^p, \quad b \in K, \quad \text{alors } d(ab) = (da)b + (-1)^p a(db).$$

On définit l'algèbre de cohomologie comme d'habitude:

$$(5) \quad H(K) = (\text{noyau de } d)/dK$$

$$(6) \quad H^p(K) = ((\text{noyau de } d) \cap K^p)/dK^{p-1} \quad (p \geq 0; K^{-1} = 0).$$

$H(K)$ est alors une algèbre, car dK est un idéal du noyau de d ; son module additif est la somme directe des modules (6).

DÉFINITION 1. Soit (K, d) une algèbre canonique, et S une application de K

⁵ La notion de support d'une cochaîne fut introduite en 1945 dans un mémoire de J. Leray (J. Math. Pures Appl., (9), 24 (1945), pp. 95-167), et, pour autant que je sache, depuis lors elle est indispensable dans la théorie. Du point de vue intuitif c'est cette notion qui remplace l'image des "chaînes" de la topologie classique. Toutefois, les anciennes images faisant intervenir les chaînes doivent être réinterprétées, car le support d'une cochaîne est en quelque sorte "orthogonal" à une chaîne; il est à regretter que les travaux cités de J. Leray ne parlent pas de ce fait. Des exemples sont donnés dans Fáy [6]: p. 100, lignes en italiques; p. 103, (11; S)-(15; S); p. 105, (20) et suite; p. 117; p. 121; p. 123, (21) et suite (dans (21) ($n \geq 2$) doit être remplacé par ($n \geq 1$), (cf. p. 123, n° 12); pp. 124-126, discussion de la cohomologie d'une solénoïde, n° 15, 16; p. 134, lignes en italiques. Je sais qu'en dehors de la théorie de J. Leray la notion de support d'une cochaîne n'intervient pas de cette même façon décisive. Je crois que cette notion est fondamentale dans le sujet du présent mémoire (cf. n° 9, Préambule), et je connais un certain nombre de résultats classiques, dont la preuve devient intuitive et simple grâce à elle.

dans la famille de parties fermées d'un espace X (si $k \in K$, $S(k)$ est un fermé de X). Nous disons que (K, d, S) est un complexe canonique sur X , si les axiomes suivants sont remplis:

$$(7) \quad S(k) = \emptyset \quad \text{équivaut} \quad k = 0$$

$$(8) \quad S(\alpha k + \beta l) \subset S(k) \cup S(l)$$

$$(9) \quad \text{si } k \in K^p, \quad l \in K^q, \quad \text{et } p \neq q, \quad \text{alors } S(k + l) = S(k) \cup S(l)$$

$$(10) \quad S(kl) \subset S(k) \cap S(l)$$

$$(11) \quad S(dk) \subset S(k)$$

où $k, l \in K$, et $\alpha, \beta \in A$.

PROPOSITION 1. Soit F un fermé de l'espace X , et $U = X - F$. Si (K, d, S) est un complexe canonique sur X , nous posons:

$$(12) \quad K_U = \{k: k \in K, S(k) \subset U\};$$

$$(13) \quad FK = K/K_U.$$

L'algèbre K_U (l'algèbre quotient K/K_U) munie des applications que d, S induisent sur elle est un complexe canonique sur U (sur F).

Pour vérifier la proposition il suffit de remarquer que K_U est un idéal de K , et que les axiomes (7)–(11) de la Définition 1 sont satisfaits.

L'homomorphisme naturel $K_U \rightarrow K$ est appelé *injection*, et

$$(14) \quad K \rightarrow K/K_U$$

est dit *section*. Nous notons l'homomorphisme (14) par la même lettre F que le sous-espace. La différentielle et la fonction de support de l'algèbre FK de la proposition précédente sont donc définies par

$$(15) \quad d(Fk) = F(dk) \quad (k \in K, Fk \in FK).$$

$$(16) \quad S(Fk) = F \cap S(k)$$

Ces relations justifient les notations; (16) motive le nom *section*.

Pour simplifier l'écriture nous notons $[K]$ le complexe de la Définition 1, dont l'algèbre est K . Exemples: la Proposition 1 définit le complexe canonique $[K_U]$ sur U , et le complexe canonique $[FK]$ sur F ; dans le premier cas la différentielle et le support sont $d|K_U, S|K_U$, mais dorénavant nous les noterons toujours par d, S , comme, par exemple, dans les premiers membres de (15), (16).

PROPOSITION 2. Utilisons les notations de la Proposition 1. Nous allons construire une application linéaire

$$(17) \quad d: H(FK) \rightarrow H(K_U).$$

Soit donné $h \in H(FK)$. Choisissons $k \in K$, tel que $Fk \in h$. dk est alors un cocycle de K_U , et nous notons dh sa classe mod dK_U . dh est déterminé par h , et dépend linéairement de h . L'inclusion $K_U \subset K$ prouve que $H(K)$ est un anneau d'opéra-

teurs de $H(FK)$, et de $H(K_U)$. Donc hh_U , h_Uh , hh_F , h_Fh ($h \in H(K)$, $h_U \in H(K_U)$, $h_F \in H(FK)$) sont définis, et on a:

$$(18) \quad d(hh_F) = (-1)^p h(dh_F), \quad d(h_Fh) = (dh_F)h \quad (h \in H^p(K)).$$

L'inclusion $K_U \subset K$, l'homomorphisme (14) et l'application (17) forment un triangle exact

$$(19) \quad \begin{array}{ccc} H(K) & \xrightarrow{F} & H(FK) \\ & \swarrow i \quad \searrow d & \\ & H(K_U) & \end{array}$$

où i et F sont des homomorphismes d'algèbres, d est linéaire, ayant les propriétés multiplicatives (18).

Pour vérifier cette proposition on n'utilise que la structure algébrique de K , FK , K_U .

Si x est un point de X , la Proposition 1 définit en particulier xK et $[xK]$. Ce dernier est équivalent à une structure purement algébrique (il est une algèbre canonique), du fait que la donnée de (xK, d) détermine (xK, d, S) ($S(xk) = x$, si $xk \neq 0$, et $S(x0) = \emptyset$).

DÉFINITION 2. Un complexe canonique $[K]$ défini sur l'espace X est appelé *couverture* de X , si les axiomes suivants sont satisfaits:

- 1° $S(k)$ est compact quel que soit $k \in K$;
- 2° Si C est un compact de X , CK possède une *unité*;
- 3° $H(xK) = H^0(xK)$, et cette algèbre se réduit aux multiples αu de son unité ($\alpha \in A$) (Axiome dit de Poincaré).

Si nous voulons préciser que A est l'anneau des coefficients de l'algèbre K de la couverture $[K]$, nous disons que celle-ci est une A -couverture.

DÉFINITION 3. Une couverture $[K]$ sur X est dite *fine*, si 2° de la Définition 2 peut être remplacé par la condition plus stricte que voici: Si C est un compact de X , et V est un voisinage arbitraire de C , il existe un $v \in K$, tel que: 1° Cv est l'unité de CK ; 2° $S(v) \subset V$.

On peut définir plus généralement des complexes canoniques *fins* (v. Leray [4], p. 53); nous utiliserons cette dernière définition aussi.

Soient $[K]$, $[K']$ deux couvertures d'un même espace X . Nous disons que $[K']$ est une *extension* de $[K]$, si cette dernière s'identifie à une partie de la première. c'est-à-dire s'il existe une inclusion $i: K \rightarrow K'$, telle que $iK^p \subset K'^p$, $id = di$, $Si = S$.

THÉORÈME FONDAMENTAL DE J. LERAY. Soient $[K_\alpha]$, $\alpha = 1, 2$, deux A -couvertures fines sur un même espace X . Il existe un isomorphisme unique

$$(20) \quad H(K_1) \approx H(K_2)$$

entre les algèbres de cohomologie, qui s'obtient de la façon suivante: Il existe une

couverture fine $[K]$, qui est extension de $[K_1]$ et de $[K_2]$; soient $i_\alpha: K_\alpha \rightarrow K$, $\alpha = 1, 2$, les isomorphismes correspondants. i_α induit un isomorphisme $H(K_\alpha) \approx H(K)$, $\alpha = 1, 2$, et (20) est le produit de ces isomorphismes.

Ce théorème justifie la définition suivante:

DÉFINITION FONDAMENTALE DE J. LERAY. Soit X un espace, et $[K]$ une A -couverture fine sur X . Nous posons

$$(21) \quad H(X) = H(K).$$

Cette algèbre est appelée algèbre de cohomologie de l'espace X à coefficients dans l'anneau A .

Le module $H(X)$ est, bien entendu, somme directe des $H^p(X)$, modules de cohomologie de degré p , $p = 0, 1, \dots$. Chaque $h \in H(X)$ est nilpotent, et

$$hk = (-1)^{pq}kh \quad (h \in H^p(X), k \in H^q(X)).$$

Si F est un fermé de X , $U = X - F$, nous avons le triangle exact

$$(22) \quad \begin{array}{ccc} H(X) & \xrightarrow{F} & (F) \\ & \swarrow i & \searrow d \\ & & H(U) \end{array} \quad (F \text{ fermé de } X, U = X - F).$$

Pour obtenir ce triangle exact nous choisissons arbitrairement une couverture fine $[K]$ sur X . $[K_U]$ de (12) sera une couverture fine de U , et $[FK]$ une couverture fine sur F . La Proposition 2 définit donc les homomorphismes de (22). F et i sont des homomorphismes d'algèbres, et (18) explicite les propriétés multiplicatives de d .

Formulons encore la proposition suivante:

PROPOSITION 3. Si $H(X)$ est une algèbre noethérienne³, le module de $H(X)$ est de type fini,⁶ et réciproquement.

Donc " $H(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments" est une locution sans ambiguïté.

6. Algèbre de cohomologie par rapport à un faisceau

Étant donné un faisceau $\mathcal{A}$ sur l'espace X , on peut définir l'algèbre de cohomologie

$$(1) \quad H(X, \mathcal{A})$$

de l'espace X par rapport au faisceau $\mathcal{A}$. Plusieurs constructions de (1) sont connues aujourd'hui. Originellement, dans la théorie de J. Leray, la définition de (1) est basée sur la construction d'un complexe canonique $[K \circ \mathcal{A}]$, dit intersection de la couverture fine $[K]$ et du faisceau $\mathcal{A}$: (1) est par définition l'algèbre de cohomologie de $K \circ \mathcal{A}$. Nous donnerons une variante de la définition de J.

⁶ Un module est dit de type fini, s'il est engendré par un nombre fini d'éléments.

Leray (Définition fondamentale ci-dessous), tout en rappelant celle-ci (Proposition 1), car les deux seront utiles.

Nous commençons par rappeler une connexion entre les notions de complexe canonique (Définition 1 du n° 5; v. aussi Proposition 1 du n° 5), et celle de faisceau (Leray [1]; [3], p. 71, n° 16; [4], pp. 47-49, nos 28, 29).

DÉFINITION 1. Si $[L]$ est un complexe canonique à supports compacts⁷ sur X , les données suivantes définissent un faisceau $\mathcal{L}_L = \mathcal{L}$ sur X : 1° $\mathcal{L}(E) = EL$ pour tout fermé E de X ; 2° la section $\mathcal{L}(E) \rightarrow \mathcal{L}(F)$, $E \supset F$, du faisceau est la section $EL \rightarrow FL$. $\mathcal{L}_L$ est appelé faisceau du complexe $[L]$.

La vérification des conditions de continuité (4), (5) du n° 1 est banale. Il en est de même dans le cas de la définition ci-dessous, mais nous en donnerons les preuves, car elles montrent "la continuité" de l'algèbre de cohomologie, fait fort important, dont nous nous servons constamment. Les preuves usuelles de ce fait sont fort compliquées, car on n'utilise pas les supports des cochaînes.

DÉFINITION 2. Si $[L]$ est un complexe canonique à supports compacts⁷ sur X , les données suivantes définissent un faisceau $\mathcal{H}_L = \mathcal{H}$ sur X : 1° $\mathcal{H}(E) = H(EL)$ pour tout fermé E de X ; 2° la section $\mathcal{H}(E) \rightarrow \mathcal{H}(F)$, $E \supset F$, du faisceau est l'homomorphisme naturel $H(EL) \rightarrow H(FL)$ des algèbres de cohomologie induit par la section $EL \rightarrow FL$. $\mathcal{H}_L$ est dit faisceau de cohomologie de $[L]$; les $H^p(EL)$ constituent au sens additif un sous-faisceau $\mathcal{H}_L^p$ de $\mathcal{H}_L$, et $\mathcal{H}_L$ est leur somme directe.

NOTE. Si $[K]$ est une couverture fine sur X , le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}_K$ de $[K]$ est le faisceau de cohomologie $\mathcal{H}_X$ de X (v. Définition 4 du n° 1; cf. Définition fondamentale du n° 5).

PREUVE DE LA CONDITION DE CONTINUITÉ (4) DU N° 1. Soit donné $a \in \mathcal{H}(E)$ ($\mathcal{H} = \mathcal{H}_L$). Il existe $l \in L$, tel que $El \in a$; $E \cap S(dl) = \emptyset$, puisque El est un cocycle (cf. (15) du n° 5). Comme $S(dl)$ est compact⁷, il existe un voisinage fermé V de E , tel que $V \cap S(dl) = \emptyset$. Vl est donc un cocycle, et sa classe, élément de $\mathcal{H}(V)$, est transformée par la section en a .

PREUVE DE LA CONDITION DE CONTINUITÉ (5) DU N° 1. Donnons nous $a \in \mathcal{H}(E)$, et un fermé F dans E , tels que $Fa = 0$. Choisissons $l \in L$, tel que $El \in a$. $Fa = 0$ signifie qu'il existe un $m \in L$, tel que $Fl = F(dm)$, donc $F \cap S(l - dm) = \emptyset$. D'où l'existence d'un voisinage fermé V de F dans X , tel que $V \cap S(l - dm) = \emptyset$. Si nous posons $W = V \cap E$, nous obtenons $Wa = 0$. Cela complète la preuve.

Cela posé, nous allons envisager des complexes canoniques fins $[L]$ sur un espace X , tels que

$$(2) \quad H(xL) = H^0(xL) \quad \text{en tout point } x \text{ de } X.$$

Cette condition équivaut à la suivante:

$$(3) \quad \mathcal{H}_L \text{ est ponctuellement isomorphe à } \mathcal{H}_L^0$$

(v. Définition 2 ci-dessus). L'algèbre de cohomologie (1) s'introduit naturelle-

⁷ Cette hypothèse est superflue, si X est *normal*; un espace localement compact ne l'est pas en général, v. Bourbaki [2], p. 27.

ment dans cette étude. En effet, selon la théorie de J. Leray ([3], p. 79, n° 25) on peut affirmer que, si (3) est valable, la classe de $\mathcal{H}_L$, au sens de l'isomorphie ponctuelle, détermine $H(L)$ complètement; de plus, cette classe peut être arbitrairement donnée. De façon précise, nous avons le

THÉORÈME FONDAMENTAL DE J. LERAY. *Étant donné un faisceau α sur X , il existe un complexe canonique $[L]$ sur X , fin et à supports compacts, tel que (3) est valable, et que $\mathcal{H}_L^0$ est ponctuellement isomorphe à α . Si $[L_i]$, $i = 1, 2$, sont deux complexes canoniques ayant ces propriétés, les algèbres de cohomologie $H(L_1)$ et $H(L_2)$ sont isomorphes.*

Ce théorème contient le théorème fondamental du n° 5: il correspond au cas, où $\mathcal{H}_L^0$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant. La notion d'algèbre de cohomologie à coefficients locaux correspond au cas, où $\mathcal{H}_L^0$ est ponctuellement constant dans X (si X est localement connexe, cela revient d'ailleurs à dire que $\mathcal{H}_L^0$ contient un sous-faisceau localement constant lui identique en tout point). De plus, les faits ci-dessus formulés guident la construction de l'algèbre spectrale d'une application (cf. le Préambule du n° 9).

Ce théorème justifie la définition fondamentale que voici:

DÉFINITION FONDAMENTALE DE J. LERAY. Soit α un faisceau donné sur l'espace X , et $[L]$ un complexe canonique sur X ayant les propriétés énoncées dans le Théorème fondamental ci-dessus. Nous posons:

$$(4) \quad H(X, \alpha) = H(L)$$

et nous appelons (4) algèbre de cohomologie de X par rapport à α .⁸

NOTATION. Si Y est un sous-espace localement compact de X , et α est défini sur ce dernier espace, la restriction $\alpha|Y$ est bien déterminée sur les compacts de Y (v. (8)–(11) du n° 1). Donc $H(Y, \alpha|Y)$ est bien déterminé. Pour simplifier les notations nous écrivons $H(Y, \alpha)$ au lieu de $H(Y, \alpha|Y)$.

Cette définition axiomatique ne nous suffira pas dans ce qui suit. (Si α possède des automorphismes (non banals), (4) définit $H(X, \alpha)$ à un automorphisme près!) Nous allons utiliser le fait que la définition de (4) peut être basée plus particulièrement sur le résultat suivant (v. Leray [4], p. 62):

PROPOSITION 1. *Soit α un faisceau sur l'espace X . Donnons nous une Z -couverture fine $[K]$ de X (c'est-à-dire une couverture fine, dont l'anneau des coefficients est l'anneau des entiers Z), telle que xK est sans torsion quel que soit $x \in X$. Il existe un complexe canonique $[K \circ \alpha]$ sur X , dit intersection de la couverture $[K]$ et du faisceau α , ayant les propriétés suivantes, qui le caractérisent: Tout élément de $K \circ \alpha$ peut être écrit comme somme formelle*

$$(5) \quad \sum_{i=1}^m k_i \circ a_i \quad (k_i \in K, a_i \in \alpha(F_i), F_i \supset S(k_i)),$$

ces sommes étant assujetties aux règles de calculs suivants:

$$(6) \quad k \circ a = k \circ (Fa), \quad F = S(k)$$

⁸ $H(X, \alpha)$ est parfois appelé algèbre de cohomologie à supports compacts; nous ne parlons pas d'autres algèbres de cohomologie.

- (7) $k_1 \circ a + k_2 \circ a = (k_1 + k_2) \circ a$
- (8) $k \circ a_1 + k \circ a_2 = k \circ (a_1 + a_2), \quad a_1, a_2 \in \mathfrak{A}(F)$
- (9) $m(k \circ a) = (mk) \circ a = k \circ (ma), \quad \text{si } m \text{ est un entier}$
- (10) $\alpha(k \circ a) = k \circ (\alpha a), \quad \text{si } \alpha \in A$
- (11) $(k_1 \circ a_1) \cdot (k_2 \circ a_2) = (k_1 k_2) \circ (a_1 a_2)$
- (12) $d(k \circ a) = (dk) \circ a \quad (d: \text{différentielle de } K)$
- (13)
$$x(k \circ a) = \begin{cases} (xk) \otimes (xa), & \text{si } x \in S(k) \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Si $\mathfrak{A}_1, \mathfrak{A}_2$ sont ponctuellement isomorphes, $K \circ \mathfrak{A}_i, i = 1, 2$ sont isomorphes. $H(K \circ \mathfrak{A})$ est indépendant du choix de la couverture fine $[K]$.

Pour la construction explicite de $K \circ \mathfrak{A}$ v. Leray ([4], pp. 58–63). Rappelons seulement que $K \circ \mathfrak{A}$ est un quotient de la somme directe des algèbres $K \otimes \mathfrak{A}(F)$ (produit tensoriel sur Z), où F parcourt les compacts de X .

PROPOSITION 2 (H. Cartan). $H^0(X, \mathfrak{A})$ est isomorphe à l'algèbre des systèmes cohérents de $\mathfrak{A}$ définis dans tout X et ayant des supports compacts. Si F est un fermé de X , la section $H^0(X, \mathfrak{A}) \rightarrow H^0(F, \mathfrak{A})$ fait correspondre à un système cohérent σ défini dans tout X sa restriction à F .

PREUVE. Soit σ un système cohérent de $\mathfrak{A}$ défini dans tout X , F son support, et $\{V_i\}$ un recouvrement fini, ouvert de F , tel que $\sigma(x) = xa_i, a_i \in \mathfrak{A}(\bar{V}_i)$, si $x \in \bar{V}_i$ (cf. (1) du n° 2). Soit $[K]$ une Z -couverture fine de X , et choisissons un système d'éléments $v_i \in K^0$, tel que $F(\sum_i v_i)$ soit l'unité de FK , et que $S(v_i) \subset V_i$ pour tout i . Posons:

$$(14) \quad \varphi(\sigma) = \sum_i v_i \circ a_i.$$

Calculons la section $x\varphi(\sigma)$:

$$(15) \quad x\varphi(\sigma) = \sum_i (xv_i) \circ (xa_i) = x(\sum_i v_i) \otimes \sigma(x) = \begin{cases} u_x \otimes \sigma(x), & \text{si } \sigma(x) \neq 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

où u_x est l'unité de xK . (15) prouve que $\varphi(\sigma)$ est indépendant du choix de $\{v_i\}, \{a_i\}$. φ est donc une application de l'ensemble des systèmes cohérents définis dans tout X et à supports compacts dans $K^0 \circ \mathfrak{A}$.

Calculons la différentielle de (15): $d(x\varphi(\sigma))$ est 0, si $\sigma(x) = 0$, et $= (du_x) \otimes \sigma(x)$, si $\sigma(x) \neq 0$. $\varphi(\sigma)$ est donc un cocycle de $K^0 \circ \mathfrak{A}$. À σ nous avons fait correspondre un $\varphi(\sigma) \in H^0(X, \mathfrak{A})$.

Réciproquement: à tout $v \in H^0(X, \mathfrak{A})$ nous allons faire correspondre un système cohérent $\sigma = \psi(v)$. Notons F le support de v (N.B. v est un élément de $K^0 \circ \mathfrak{A}$); F est compact. Nous avons $xv = u_x \otimes a_x$, où u_x est l'unité de xK , et $a_x \in \mathfrak{A}(x)$ est bien déterminé selon des résultats algébriques connus concernant la cohomologie d'un produit tensoriel (v. Leray [4], p. 31, (17.6)). Or,

$\sigma(x) = a_x$ est un système cohérent défini sur tout X et à support compact, vu les propriétés de continuité du faisceau.

Pour achever la preuve il suffit de montrer que $\psi\varphi$ et $\varphi\psi$ sont des identités; la seconde partie de la proposition est évidente d'après les constructions précédentes.

La Proposition 2 donne une méthode de détermination de $H^0(X, \mathfrak{A})$. Pour les autres degrés le plus important outil de calcul est la suite exacte ci-dessous rappelée, et l'algèbre spectrale, dont une utilisation est donnée dans le n° suivant.

Soit $\mathfrak{A}$ un faisceau sur X ; notons Y un fermé de X . Nous avons alors le triangle exact

$$(16) \quad \begin{array}{ccc} H(X, \mathfrak{A}) & \rightarrow & H(Y, \mathfrak{A}) \\ & \nwarrow & \nearrow d \\ & H(X - Y, \mathfrak{A}) & \end{array}$$

dont les homomorphismes sont définis comme suit: Soit $[L]$ un complexe canonique satisfaisant aux conditions du Théorème fondamental de Leray (on peut prendre pour $[L]$ l'intersection $K \circ \mathfrak{A}$ de la Proposition 1). Selon la Proposition 1 du n° 5 $L_U = \{l: l \in L, S(l) \subset U\}$, $U = X - Y$, est un complexe fin sur $X - Y$, et son faisceau de cohomologie de degré 0 est ponctuellement isomorphe à $\mathfrak{A}|(X - Y)$. De même: $Y[L] = [YL]$ est un complexe fin sur Y , dont le faisceau de cohomologie de degré 0 est ponctuellement isomorphe à $\mathfrak{A}|Y$. Selon la Proposition 2 du n° 5 on a le triangle exact (19) du n° 5; selon les remarques précédentes les algèbres figurant dans ce triangle exact sont celles de (16).

Au n° 10 nous utilisons une construction particulière de d de (16). Soit à présent $L = K \circ \mathfrak{A}$, où $[K]$ est une couverture fine. Nous définissons les produits kl , $k \in K$, $l \in L$ d'une façon évidente: $k(k' \circ a) = (kk') \circ a$, et nous prolongeons cette loi par linéarité. Soit donné $h \in H(Y, \mathfrak{A})$, $l \in Y(K \circ \mathfrak{A})$, $l \in h$; choisissons $\tilde{l} \in \tilde{l}$. Si F désigne le support de $\tilde{l}$, il existe un $v \in K^0$, tel que Fv est l'unité de FK , et que $S(v) \cap S(d\tilde{l}) = \emptyset$. Il est alors évident que

$$(17) \quad dh = \{\text{classe de } (dv)l\},$$

puisque dh est la classes de $d(vl) = (dv)l + v(dl) = (dv)l$.

La théorie de J. Leray généralise les notions précédentes, et définit la cohomologie d'un espace par rapport à un faisceau différentiel. Nous utilisons à présent seulement le résultat rappelé dans la Proposition 3 ci-dessous. Avant de la formuler, rappelons la définition du *faisceau canonique*: c'est un faisceau $\mathfrak{B}$, tel que: 1° $\mathfrak{B}(F)$ est une algèbre canonique pour tout fermé F de X ; 2° les sections du faisceau conservent les degrés et commutent avec les différentielles (notées par la même lettre d).

PROPOSITION 3. Soit $\mathfrak{B}$ un faisceau canonique sur l'espace X . Désignons par $[K]$ la même Z -couverture fine que dans la Proposition 1. Formons le complexe $[K \circ \mathfrak{B}]$ comme dans la proposition citée, en convenant que les règles de calcul (6)–(11) et

(13) soient valables, et que (12) soit remplacé par les conventions suivantes:

(18) si $k \in K^p$, et $b \in \mathcal{B}^q(F)$, alors $k \circ b$ est de degré $p + q$,

(19) $d(k \circ b) = (dk) \circ b + (-1)^p k \circ (db)$.

Nous obtenons un complexe canonique fin par cette construction. $H(K \circ \mathcal{B})$ est indépendant du choix de $[K]$.

Nous utilisons une seule fois la cohomologie par rapport à un faisceau canonique $\mathcal{B}$; nous y désignons $H(X \circ \mathcal{B})$ l'algèbre de cohomologie $H(K \circ \mathcal{B})$, la notation $H(X, \mathcal{A})$ étant réservée pour la cohomologie par rapport à un faisceau dépourvu de différentielle. Dans les nos 9, 10 nous utilisons en outre l'intersection des couvertures (Leray [4], pp. 50-53):

PROPOSITION 4. Soient $[K]$, $[L]$ complexes canoniques sur un même espace X ; notons $\mathcal{L}$ le faisceau de $[L]$ (Définition 1). La Proposition 3 définit le complexe canonique $[K \circ \mathcal{L}]$ (cf. (5)-(11), (13), (18), (19)) que nous notons $[K \circ L]$. Si $[K]$ et $[L]$ sont des Z -couvertures, $[K \circ L]$ est, lui aussi, une Z -couverture, extension de $[K]$ et de $[L]$; si l'une des couvertures $[K]$, $[L]$ est fine, $[K \circ L]$ est fine.

La partie non banale de la preuve de cette proposition utilise le fait purement algébrique que $H(xK) \approx Z$, et $H(xL) \approx Z$ entraîne

$$H(xK \circ xL) = H(xK \otimes xL) \approx Z$$

(Leray [4], p. 31, Proposition 17.5).

7. Sur le calcul de $H(X, \mathcal{A})$

Le principal résultat du présent n° peut être sommairement formulé comme suit: Soit $\mathcal{A}$ un faisceau sur X , dont les ensembles critiques (Définition 2 du n° 3) sont localement connexes, le premier d'indice transfini étant vide. Une algèbre graduée de $H(X, \mathcal{A})$ est alors incluse dans le terme E_∞ d'une algèbre spectrale, dont le premier terme est une somme directe d'algèbres de cohomologie à coefficients locaux.

Nous commençons par rappeler certaines notions concernant les algèbres spectrales (v. Leray [4], pp. 14-24).

Une fonction φ à valeurs entières définie dans une algèbre K est dite filtration de celle-ci, si

$$(1) \quad \varphi(0) = +\infty$$

$$(2) \quad \varphi(\alpha a + \beta b) \geq \min(\varphi(a), \varphi(b)) \quad (a, b \in K; \alpha, \beta \in A)$$

$$(3) \quad \varphi(ab) \geq \varphi(a) + \varphi(b).$$

Si φ satisfait à (1), (2) seulement, nous disons qu'elle est une filtration non multiplicative; dans ce cas toutes les énoncées ci-dessous sont valables, sauf celles concernant la multiplication. Nous posons:

$$(4) \quad K_p = \{k: k \in K, \varphi(k) \geq p\}$$

$$(5) \quad GK = \sum_p K_p / K_{p+1}.$$

GK est appelé algèbre graduée de K associée à la filtration φ . La donnée des idéaux (4) détermine la filtration:

$$(6) \quad \varphi(k) = \max_{k \in K_p} p \quad (k \in K, k \neq 0).$$

Soit $g: K \rightarrow K'$ un homomorphisme d'une algèbre filtrée K dans une autre K' . Pour que g définisse un homomorphisme de l'algèbre graduée GK dans GK' , il faut et il suffit qu'il augmente la filtration.

Si l'algèbre K d'un complexe canonique $[K]$ sur X est filtrée, nous pouvons définir les filtrations des sections FK :

$$(7) \quad \varphi_F(Fa) = \max_{Fb=Fa} \varphi(b) \quad (F: \text{fermé de } X)$$

on aura donc $\varphi_F(Fa) \geq \varphi(a)$; une telle convention définit un complexe canonique *filtré* $[K]$. Plus généralement: un complexe canonique $[K]$ est *filtré*, si l'on donne arbitrairement des filtrations ψ_F des sections FK , telles que $\psi_F(Fa) \geq \psi_E(Ea)$ ($a \in K, E \supset F$) soit toujours valable. Dans la suite nous envisageons des filtrations telles que

$$(8) \quad \varphi(k) = \min_x \varphi_x(xk)$$

pour tout $k \in K$; pour simplifier les notations nous écrivons parfois φ au lieu de φ_F .

Dans ce qui suit K est une algèbre canonique, d sa différentielle (v. (1)–(4) du n° 5). Selon Leray ([4], p. 16) nous posons:

$$(9) \quad C_r^p = \{k: k \in K, \varphi(k) \geq p, \varphi(dk) \geq p + r\}$$

$$(10) \quad D_r^p = dC_r^{p-r} = \{k: k \in K, k = dl, \varphi(k) \geq p, \varphi(l) \geq p - r\}.$$

Ces sous-modules de K sont "des cocycles, et des cobords approximatifs". Nous définissons selon (9.9) de l.c. (en remplaçant H_r par E_r , comme c'est usuel en théorie des espaces fibrés):

$$(11) \quad E_r = \sum_p C_r^p / (C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p),$$

ce qui est légitime, vu les inclusions (9.4)–(9.8) de l.c. Nous allons trouver une différentielle (δ_r de l.c.):

$$(12) \quad d_r: E_r \rightarrow E_r, \quad d_r d_r = 0,$$

en définissant: si

$$(13) \quad h = c \bmod (C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p), \quad c \in C_r^p$$

$$(14) \quad d_r(h) = dc \bmod (C_{r-1}^{p+r+1} + D_{r-1}^{p+r}).$$

Cela posé, rappelons le principal résultat du n° 9 (pp. 15–20) de Leray [4]:

THÉORÈME DE J. LERAY. La donnée d'une filtration φ d'une algèbre canonique K détermine:

1° Une filtration, notée également φ , de $H(K)$:

$$(15) \quad \varphi(h) = \max_{c \in h} \varphi(c);$$

d'où une algèbre graduée $GH(K)$ de $H(K)$.

2° Une algèbre spectrale $\{E_r\}$: E_r est défini dans (11); il est muni de la différentielle d_r de (13), (14); $E_{r+1} = H(E_r)$, l'algèbre de cohomologie du second membre étant calculée avec d_r ; les propositions A-D ci-dessous formulées sont valables.

3°. Une inclusion $E_\infty \supset GH(K)$, les deux membres de l'inclusion étant égaux dans les conditions formulées dans D.

L'algèbre graduée $GH(K)$ de 1° possède un degré canonique l induit par le degré de $H(K)$, et un degré filtrant p , induit par la filtration (15):

$$(16) \quad H(K)_p = \{h: h \in H(K), \varphi(h) \geq p\}$$

$$(17) \quad H^l(K)_p = H^l(K) \cap H(K)_p.$$

De ce fait $GH(K)$ est bigradué, c'est-à-dire double somme directe:

$$(18) \quad GH(K) = \sum_p H(K)_p / H(K)_{p+1} = \sum_p \sum_{l \geq 0} H^l(K)_p / H^l(K)_{p+1}.$$

L'algèbre spectrale de 2° a les propriétés suivantes:

A. E_r est bigradué: Nous désignons $E_r^p(l)$ les éléments de degré l du p -ième terme de (11), nous posons donc

$$(19) \quad E_r^p(l) = (K^l \cap C_r^p) / (K^l \cap (C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p)).$$

Si nous convenons alors

$$(20) \quad E_r^p = C_r^p / (C_{r-1}^{p+1} + D_{r-1}^p) = \sum_{l \geq 0} E_r^p(l)$$

$$(21) \quad E_r(l) = \sum_p E_r^p(l)$$

nous avons

$$(22) \quad E_r = \sum_{l \geq 0} E_r(l) = \sum_p E_r^p = \sum_p \sum_{l \geq 0} E_r^p(l).$$

(N.B. Dans la théorie des espaces fibrés on utilise souvent les degrés p (dit degré base) et $l - p$ (dit degré fibre), et l'on écrit $E_r^{p,q}$, ce qui est $E_r^p(p + q)$ avec nos notations; cf. les règles de degré de B ci-dessous.)

B. La différentielle d_r de (12)-(14) possède les propriétés de degré que voici: si h est homogène de degré filtrant p et de degré canonique l , dh est homogène de degré filtrant $p + r$ et de degré canonique $l + 1$. Donc

$$(23) \quad d_r E_r^p(l) \subset E_r^{p+r}(l+1).$$

En ce qui concerne la multiplication:

$$(24) \quad d_r(ab) = (d_r a)b + (-1)^l a(d_r b) \quad (a \in E_r(l), b \in E_r).$$

C. L'algèbre de cohomologie de (E_r, d_r) est E_{r+1} : Nous notons κ_{r+1}^r l'homomorphisme naturel des cocycles (dits d_r -cocycles) de E_r sur E_{r+1} , et nous posons $\kappa_s^r = \kappa_s^{s-1} \cdots \kappa_{r+1}^r$ pour $s \geq r + 2$. κ_s^r n'est défini que pour certains éléments de E_r , donc $\kappa_s^r E_r$ n'a pas de sens. Toutefois, il peut être utile d'employer ce symbole en convenant que

$$(25) \quad \kappa_s^r(E_r) = E_s \quad (\text{convention; } s > r).$$

D. E_∞ est défini: Si r est arbitrairement fixé, et s parcourt les nombres $> r$,

alors E_∞ est le quotient de l'intersection des domaines de définition des κ_s^r par la réunion des noyaux de ces homomorphismes. Si φ est borné sur l'ensemble des $h \neq 0$, et r dépasse son oscillation, alors d_r est identiquement nulle, d'où

$$(26) \quad \begin{aligned} E_r &= GH(K) \\ E_r^p(l) &= H^l(K)_p / H^l(K)_{p+1} \end{aligned} \quad \text{si } r > (\max_{h \neq 0} \varphi(h) - \min \varphi(h)).$$

Cela rappelé, nous allons prouver le

THÉORÈME 1. *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau défini dans l'espace X , dont les ensembles critiques (Définition 2 du n° 3) sont*

$$(27) \quad X_0 \supset X_1 \supset \dots, \quad \text{tels que } \bigcap_{q=0}^\infty X_q = \emptyset.$$

Définissons une filtration non multiplicative de $H(X, \mathcal{A})$ comme suit:

$$(28) \quad \varphi(h) = -q, \quad h \in H(X, \mathcal{A}), \quad \text{équivalent } X_q h \neq 0, \quad X_{q+1} h = 0.$$

Notons $GH(X, \mathcal{A})$ l'algèbre graduée de $H(X, \mathcal{A})$ muni de la filtration φ de (28). Il existe alors une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que

$$(29) \quad E_1 = \sum_{q \geq 0} H(X_q - X_{q+1}, \mathcal{A})$$

$$(30) \quad E_\infty \supset GH(X, \mathcal{A}).$$

Les éléments de $H^l(X_q - X_{q+1}, \mathcal{A})$ sont homogènes de degré canonique l , et de degré filtrant $-q$. La multiplication suit les règles suivantes: si $h_i \in H(X - X_1, \mathcal{A})$, et $k_j \in H(X_q - X_{q+1}, \mathcal{A})$ avec $q \geq 1$, le produit $h_1 h_2$ dans l'algèbre spectrale est celui de $H(X - X_1, \mathcal{A})$, et on a $h_1 k_1 = k_1 h_1 = k_1 k_2 = 0$ dans l'algèbre spectrale. Si les espaces différences $X_q - X_{q+1}$ sont localement connexes, $\mathcal{A}|(X_q - X_{q+1})$ est ponctuellement constant; si $\mathcal{A}_q$ désigne le faisceau localement constant, qui lui est ponctuellement isomorphe, nous avons

$$(31) \quad E_1^{-q}(l) = H^l(X_q - X_{q+1}, \mathcal{A}_q) \quad (\mathcal{A}_q \text{ localement constant})$$

où le second membre est une algèbre de cohomologie classique.

Nous prouvons d'abord le

LEMME 1. *Soit $\mathcal{A}$ un faisceau quelconque sur l'espace X , et donnons nous arbitrairement une suite (27) de sous-espaces fermés de ce dernier. Les énoncés du Théorème 1 sont alors valables, sauf ceux concernant (31): il existe donc une algèbre spectrale (29), (30) ayant les propriétés de degré et de multiplication formulées dans le théorème cité.*

PREUVE. Soit $[K]$ une Z -couverture fine de l'espace X , et formons le complexe canonique $[K \circ \mathcal{A}]$ selon la Proposition 1 du n° 6; la différentielle est donnée par (12) du n° 6. Selon la Définition fondamentale du n° 6 $H(X, \mathcal{A}) = H(K \circ \mathcal{A})$. Si nous donnons donc une filtration quelconque de $K \circ \mathcal{A}$, l'algèbre spectrale, qui s'en déduit, satisfait à (30).

Afin d'obtenir l'algèbre spectrale du lemme nous commençons par changer la multiplication donnée dans le faisceau $\mathcal{A}$: Soit $\mathcal{A}'$ un faisceau, dont la structure

additive est identique à celle de $\mathcal{A}$, et dont la multiplication est définie par

$$ab = \begin{cases} ab, & \text{si } F \cap X_1 = \emptyset \\ 0, & \text{sinon} \end{cases} \quad a, b \in \mathcal{A}'(F)$$

où F est un fermé quelconque de X . Cela dit, nous écrivons $\mathcal{A}$ au lieu de $\mathcal{A}'$, pour simplifier les notations.

Définissons une filtration φ de $K \circ \mathcal{A}$ comme suit:

$$(32) \quad \text{si } x \in X_q - X_{q+1}, \text{ et } l \in K \circ \mathcal{A}, \quad xl \neq 0, \quad \varphi_x(xl) = -q$$

$$(33) \quad \varphi(l) = \min_x \varphi_x(l)$$

(cf. (7), (8)). Cela posé, notons:

$$(34) \quad \varphi(l) \leq 0, \quad \varphi(dl) \geq \varphi(l) \quad \text{pour tout } l \in K \circ \mathcal{A}, \quad l \neq 0.$$

Calculons le terme E_0 de l'algèbre spectrale: Notons C_r^p, D_r^p (9), (10) attachés à $K \circ \mathcal{A}$ filtré par φ de (33). Vu (34) nous avons

$$(35) \quad C_{-1}^{-p} = C_0^{-p}, \quad D_{-1}^{-p} = dC_0^{-p+1} \subset C_0^{-p+1}.$$

Ces relations donnent selon (11)

$$(36) \quad E_0 = \sum_{p=0}^{\infty} C_0^{-p} / C_0^{-p+1}.$$

Pour interpréter les termes de cette somme, nous posons

$$(37) \quad K_q = \{k: k \in K, S(k) \cap X_{q+1} = \emptyset\}.$$

$[K_q]$ est donc une Z -couverture fine de $X - X_{q+1}$. $F_q = X_q - X_{q+1}$ est un fermé de $X - X_{q+1}$, donc

$$(38) \quad K_q / K_{q-1} = F_q K_q$$

est l'anneau d'une Z -couverture fine de F_q .

Cela posé, nous avons

$$(39) \quad C_0^{-q} = \{l: l \in K \circ \mathcal{A}, xl = 0, \text{ si } x \in X_{q+1}\}$$

selon la définition même (cf. seconde relation de (34)). Autrement dit: C_0^{-q} est constitué par les éléments de $K \circ \mathcal{A}$, dont le support est dans $X - X_{q+1}$. D'où

$$(40) \quad C_0^{-q} = K_q \circ \mathcal{A}.$$

Formons l'expression de E_0^{-q} selon (37) et (40):

$$(41) \quad E_0^{-q} = (K_q \circ \mathcal{A}) / (K_{q-1} \circ \mathcal{A}) = (F_q K_q) \circ (\mathcal{A} | X_q).$$

La dernière expression de (41) est l'intersection d'une couverture fine de $X_q - X_{q+1}$ et d'un faisceau défini sur X_q . Il est en outre facile à contrôler (cf. (13), (14), (39)) que d_0 est la différentielle (12) du n° 6 pour cette intersection. Donc

$$(42) \quad E_1 = \sum_{q=0}^{\infty} H(K'_q \circ (\mathcal{A} | X_q)) \quad (K'_q = F_q K_q).$$

Cela étant, définissons le sous-faisceau α_q de α comme suit:

$$(43) \quad \alpha_q(F) = \begin{cases} \alpha(F), & \text{si } F \subset X_q - X_{q+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Or, il est évident que $K'_q \circ (\alpha | X_q) = K'_q \circ \alpha_q$, nous obtenons donc pour E_1 :

$$(44) \quad E_1 = \sum_{q=0}^{\infty} H(K'_q \circ \alpha_q).$$

Selon la Proposition 1 du n° 6 cette expression est identique à (29), puisque K'_q est l'anneau d'une Z -couverture fine de $X_q - X_{q+1}$, et $\alpha | (X_q - X_{q+1}) = \alpha_q | (X_q - X_{q+1})$.

Prouvons que la filtration (32), (33) induit sur $H(X, \alpha)$ la filtration (28) du théorème. Supposons $X_q h \neq 0$, $X_{q+1} h = 0$. Selon la première hypothèse $X_q \cap S(c) \neq \emptyset$ pour tout cocycle c de $K \circ \alpha$ dans la classe h . Donc $\varphi(c) \leq -q$ selon (32), (33). Selon la seconde hypothèse il existe un cocycle $c_0 \in h$ de $K \circ \alpha$, tel que $X_{q+1} \cap S(c_0) = \emptyset$. D'où $\varphi(c_0) \geq -q$ selon (32), (34). Cela prouve $\varphi(h) = -q$ au sens de (32), (34) conformément à (28). La preuve de la réciproque est analogue. Pour l'algèbre graduée de la suite spectrale nous avons donc (30).

PREUVE DU THÉORÈME 1. Utilisons les notations du théorème, et appliquons le Lemme 1. $\alpha | (X_q - X_{q+1})$ est ponctuellement constant selon le Corollaire 2 du n° 3, il est donc ponctuellement isomorphe à un faisceau localement constant α_q défini dans $X_q - X_{q+1}$. L'expression (44) donne alors les affirmations du théorème concernant (31).

CHAPITRE 3. COHOMOLOGIE D'UNE APPLICATION

8. Applications de type d'homologie simple

Donnons-nous une application continue

$$(1) \quad f: X \rightarrow Y$$

d'un espace dans un autre. Explicitons la Définition 5 du n° 1 du faisceau image $\mathfrak{F}$ de f :

$$(2) \quad \mathfrak{F}^p(E) = H^p(f^{-1}E) \quad (E \text{ est un fermé de } Y)$$

$$(3) \quad \begin{aligned} &\text{la section } \mathfrak{F}^p(E) \rightarrow \mathfrak{F}^p(F), E \supset F \text{ du faisceau est la section } H^p(f^{-1}E) \rightarrow H^p(f^{-1}F) \\ &\text{des algèbres de cohomologie} \end{aligned}$$

$$(4) \quad \mathfrak{F} = \sum_{p \geq 0} \mathfrak{F}^p \text{ est muni de la multiplication des algèbres de cohomologie.}$$

Les faisceaux modules $\mathfrak{F}^p$ sont des sous-faisceaux de $\mathfrak{F}$ au sens additif.

DÉFINITION 1. Nous disons que $y \in Y$ est une valeur critique de l'application f , si le faisceau image $\mathfrak{F}$ est critique au point y . Le α -ième ensemble critique Y_α de $\mathfrak{F}$ est appelé α -ième ensemble critique de f .

Explicitons cette définition; disons d'avance que son équivalence avec celle de III.1 de l'Introduction n'est pas banale du tout (cf. Critère 1 ci-dessous).

Soit $y \in Y$ une valeur non critique de f . Il existe alors un voisinage fermé V de y , tel que $\mathcal{F}|_V$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant $\approx H(f^{-1}y)$ (Définition 1 du n° 3). Rappelons la définition de système cohérent σ de $\mathcal{F}|_V$: c'est une loi faisant correspondre à tout $z \in V$ une classe de cohomologie $\sigma(z) \in H(f^{-1}z)$, satisfaisant à la condition (1) du n° 2. Cela rappelé, il existe une algèbre $\mathcal{B}(V)$ de systèmes cohérents de $\mathcal{F}|_V$, telle que la correspondance $\sigma \rightarrow \sigma(z)$ ($\sigma \in \mathcal{B}(V)$, $\sigma(z) \in H(f^{-1}z)$) établit une isomorphie entre $\mathcal{B}(V)$ et $H(f^{-1}z)$ quel que soit $z \in V$. (D'où, en particulier, $H(f^{-1}z) \approx H(f^{-1}y)$ pour tout $z \in V$. Notons que cette isomorphie seule ne suffit pas pour que y soit une valeur non critique, il faut qu'elle se déduise des sections des algèbres de cohomologie.) Dans des conditions particulières (cf. Critères 1-3 ci-dessous) nous donnons des définitions équivalentes plus simples. Retenons à présent le fait que nos conditions concernant les valeurs non critiques sont très exigeantes. C'est important pour deux raisons: 1° nous obtenons ainsi une forme simple pour E_2 du Théorème A de l'Introduction; 2° les résultats du n° 3, et les Critères ci-dessous précisent ainsi bien la structure de $\mathcal{F}$.

Les valeurs critiques de f constituent le premier ensemble critique Y_1 . (Notons que tout point frontière de $Y - f(X)$ peut appartenir à Y_1 ; c'est le cas, par exemple, si cette différence est non vide, et f est propre, vu que nous avons convenu $H(\emptyset) = 0$.) Bien que notre définition est très exigeante en ce qui concerne les valeurs non critiques, la Proposition 2 ci-dessous montre que des hypothèses assez générales concernant f implique que Y_1 est *rare* dans Y . Pour définir Y_2 , on pose $X_1 = f^{-1}(Y_1)$, et on cherche les valeurs critiques de $f|_{X_1}$, etc.

Soit Y la droite numérique. f est donc une fonction numérique, continue, partout définie dans X . Si y_0 est non critique au sens de la Définition 1, il est non critique au sens usuel: Si $[y_1, y_2]$, $y_1 < y_0 < y_2$ est un intervalle suffisamment petit, $H(y_1 \leq f \leq y_2) \rightarrow H(f^{-1}y)$ est un isomorphisme selon le Critère 2 ci-dessous quel que soit y , $y_1 \leq y \leq y_2$ (nous notons, comme d'habitude, $(y_1 \leq f \leq y_2)$ la partie de X , où f satisfait à l'inégalité entre parenthèses; pour ce qui suit cf. Fáry [2]). Donc, $H(y_1 \leq f < y_2) = 0$, et $H(y_1 < f \leq y_2) = 0$, ce qui prouve que y_0 est une valeur non critique de f . La réciproque n'est pas vraie. Dans la théorie de M. Morse $f(x)$, et $g(x) = -f(x)$ n'ont pas nécessairement le même ensemble de valeurs critiques, alors que notre définition ne peut pas faire intervenir l'orientation de la droite.

Dans le cas, où Y est localement connexe, nous avons donné une autre définition de valeur critique dans l'Introduction. Ces deux définitions sont compatibles selon le

CRITÈRE 1. *Supposons que Y est localement connexe, et que f applique X sur Y . Pour qu'un point y_0 soit valeur non critique de f , il faut et il suffit qu'il possède un voisinage fermé, connexe V , tel que la section $H(f^{-1}V) \rightarrow H(f^{-1}y)$ applique la première algèbre sur la seconde, et que son noyau soit indépendant du point y , quand celui-ci décrit V .*

La preuve de ce Critère est basée sur le Lemme 1 ci-dessous, dont nous préparons à présent l'énoncé.

Utilisons les notations et les hypothèses du Critère 1. Soit y_0 une valeur non critique de f , et V un voisinage fermé connexe de ce point, tel que $\mathfrak{F} \mid V$ soit ponctuellement isomorphe à un faisceau constant. Soit C un compact connexe de V , $D = f^{-1}(C)$, $g = f \mid D$. Envisageons l'algèbre spectrale (11), (12) du n° 9 attachée à g . Le terme (11) du n° 9 est à présent $H(C, H(F))$, où $H(F)$ est l'anneau des coefficients de cette algèbre de cohomologie, et $H(F) \approx H(f^{-1}y_0)$. En effet, $\mathfrak{F} \mid C = (\mathfrak{F} \mid V) \mid C$ est un faisceau ponctuellement isomorphe à un faisceau constant $\approx H(F)$, ce dernier peut donc remplacer $\mathfrak{F}$ dans $H(C, \mathfrak{F})$. $H(C, H(F)) = H(F) + H^+(C, H(F))$, où le second terme du second membre est l'idéal des éléments de degré ≥ 1 . Notons $H(D)_1$ les éléments de degré filtrant ≥ 1 de l'algèbre spectrale en question. Nous avons: $\kappa_\infty^2 H^+(C, H(F)) \supset GH(D)_1$ (cf. (25) du n° 7).

LEMME 1. *Pour tout $y \in C$ le noyau de la section $H(D) \rightarrow H(f^{-1}y)$ est $H(D)_1$; il est donc indépendant de y .*

PREUVE. Le lemme est un corollaire banal de la théorie générale de Leray ([4], pp. 90–103): Si $h \in H(D)$, $h \neq 0$, et la filtration de h est nulle, h contient un cocycle de la forme $u \circ h_1$, $h_1 \in H(F)$, $h_1 \neq 0$, dont la section par $f^{-1}y$ est h_1 , donc $\neq 0$. Si $h \in H(D)$ est de filtration ≥ 1 , son image par la section $H(D) \rightarrow H(f^{-1}y)$ sera une classe de cohomologie de filtration ≥ 1 dans l'algèbre spectrale de l'application constante $(f^{-1}y) \rightarrow y$; cette image est donc nulle (cf. l.c., p. 92, Théorème 50.2, a).

PREUVE DU CRITÈRE 1. Si les hypothèses du Critère 1 sont réalisées, y_0 est évidemment une valeur non critique de f . Supposons donc que y_0 est une valeur non critique de f . Soit V un voisinage fermé de y_0 , tel que $\mathfrak{F} \mid V$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant. Comme Y est localement connexe, il existe un tel V connexe. Posons $C = V$ dans le Lemme 1; sa conclusion montre que le Critère 1 est valable.

CRITÈRE 2. *Supposons que $f(X) = Y$, et que $y_0 \in Y$ possède une base β de voisinages fermés V , telle que $H(V) = H^0(V) \approx A$ pour tout $V \in \beta$. Pour que y_0 soit une valeur non critique de f il faut et il suffit qu'il existe un $V \in \beta$, tel que la section $H(f^{-1}V) \rightarrow H(f^{-1}y)$ applique la première algèbre isomorphiquement sur la seconde en tout point $y \in V$.*

PREUVE. Il suffit de prouver la nécessité des conditions du critère, supposons donc que y_0 est non critique. Choisissons un $V \in \beta$ tel que $\mathfrak{F} \mid V$ soit ponctuellement isomorphe à un faisceau constant $\approx H(F) \approx H(f^{-1}y_0)$. Utilisons les notations du Lemme 1, et posons $C = V$. $GH(D)_1 \subset \kappa_\infty^2 H^+(V, H(F))$, comme nous l'avons déjà rappelé. Or, $H^+(V, H(F)) = 0$ à présent selon les hypothèses concernant β . Le noyau de la section $H(f^{-1}V) \rightarrow H(f^{-1}y)$ est donc nul selon le Lemme 1 en tout point y . L'image de cette section est $H(f^{-1}y)$, ce qui termine la preuve du Critère 2.

Notons que les hypothèses du Critère 2 sont en particulier remplies, si tout point de Y possède des voisinages arbitrairement petits contractiles, donc, en particulier, pour les polyèdres. Le Critère 3 ci-dessous est, par contre, utile dans le cas où Y n'est pas localement connexe:

CRITÈRE 3. *Supposons que $H(f^{-1}y_0)$ est engendré par un nombre fini de classes de cohomologie. Pour que y_0 soit une valeur non critique de f , il faut et il suffit qu'il existe un voisinage fermé U de y_0 et une sous-algèbre I de $H(f^{-1}U)$, tels que $I \approx H(f^{-1}y)$ pour tout $y \in U$, cet isomorphisme étant établi par la section $I \rightarrow H(f^{-1}y)$.*

PREUVE. Si Y est localement connexe, le Critère 1 donne immédiatement le Critère 3. Choisissons, en effet, V selon le Critère 1. Soit I' une sous-algèbre de $H(f^{-1}V)$ engendré par un nombre fini de classes de cohomologie, tel que $FI' = H(F)$, où $F = f^{-1}y_0$. Notons N le noyau de la section $I' \rightarrow H(F)$. Ce noyau est engendré par un nombre fini d'éléments, il existe donc un voisinage U de y_0 dans V , tel que N soit annulé par la section $H(f^{-1}V) \rightarrow H(f^{-1}U)$. Ce voisinage satisfait aux conditions du Critère, si nous notons I l'image de I' dans $H(f^{-1}U)$.

Mais le Critère 3 est surtout utile quand Y n'est pas localement connexe. Donnons donc la preuve dans le cas général. La suffisance des conditions étant évidente, prouvons leur nécessité, supposons donc que y_0 est non critique. On peut alors choisir un nombre fini de systèmes cohérents $\sigma_1, \dots, \sigma_k$ de $\mathfrak{F}$ définis dans un voisinage fermé W de y_0 , et tels que $\sigma_i \rightarrow \sigma_i(y)$, $i = 1, \dots, k$ définit un isomorphisme entre $\mathfrak{B}(W) = \{\sigma_1, \dots, \sigma_k\}$ et $H(f^{-1}y)$ en tout point $y \in W$. Vu la condition de continuité (1) du n° 2 que satisfont les σ_i on peut trouver un voisinage V_i de y_0 dans W , tel que $\sigma_i(y)$ soit la section par $f^{-1}y$ d'un élément $h_i \in H(f^{-1}V_i)$ en tout point $y \in V_i$ ($i = 1, \dots, k$). Posons: $V = V_1 \cap \dots \cap V_k$, $h'_i = (f^{-1}V)h_i$, $I' = \{h'_1, \dots, h'_k\}$, $H(f^{-1}y)$ sera alors la section par $f^{-1}(y)$ de I' en tout point $y \in V$, et le raisonnement ci-dessus prouve l'existence de U et de $I \subset H(f^{-1}U)$ du Critère, dont la preuve est donc complète.

Notons qu'en général $I \neq H(f^{-1}U)$ dans le Critère 3; selon le Critère 2 cela provient du fait que Y peut être compliqué du point de vue de connexion locale.

Le Critère 4 ci-dessous compare la définition de Fáy [1] des valeurs critiques d'une application avec la présente définition; il ne sera pas utilisé dans le reste du travail.

CRITÈRE 4. *Supposons que Y est localement connexe, et que $f(X) = Y$. Pour que y_0 soit valeur critique de f il faut et il suffit qu'il le soit au sens de Fáy [1], p. 668, (8).*

PREUVE. Supposons y_0 non critique au sens de l.c., et soit V un voisinage connexe, suffisamment petit de y_0 . Selon les conditions de l.c. les hypothèses du Critère 1 sont alors remplies, y_0 est donc une valeur non critique de f .

Si y_0 est une valeur non critique, nous pouvons appliquer le Lemme 1, pour un compact connexe C quelconque compris dans un voisinage V de y_0 , tel que $\mathfrak{F} \mid V$ est ponctuellement isomorphe à un faisceau constant. Le Lemme 1 prouve alors que les conditions de l.c. sont satisfaites, y_0 est donc une valeur non critique au sens de l.c. Cela prouve l'équivalence des deux définitions pour les espaces localement connexes, en particulier pour les polyèdres.

En utilisant la Définition 1 il est aisé d'introduire la notion de *point critique* d'une application f : Un point $x \in X$ est appelé *point non critique* de l'application f , s'il possède un système fondamental de voisinages fermés, tel que $f(x)$ soit une valeur non critique de $f \mid V$ quel que soit le voisinage V de ce système. Les points critiques

peuvent être caractérisés comme suit: Un point x de X est *critique*, s'il possède un voisinage fermé U tel que $f(x)$ est une valeur critique de $f|V$ quel que soit le voisinage fermé V de x dans U . Cette caractérisation des points critiques peut remplacer la définition précédente. La notion introduite contient un élément arbitraire: nous avons utilisé des voisinages *fermés*, alors que nous aurions pu prendre des voisinages quelconques, ou encore des voisinages ouverts. Nous n'avons pas assez d'expérience pour pouvoir choisir entre ces possibilités. De toute façon, dans le présent travail nous n'utilisons pas cette notion (et dans le mémoire ultérieur, mentionné dans VI de l'Introduction, nous envisageons un cas particulier, où ces notions sont équivalentes). Notons encore que, inversement à ce que nous avons fait, on définit souvent les valeurs critiques de f en prenant l'image par f de l'ensemble des points critiques. Cette définition n'est pas adéquate du point de vue où nous nous plaçons dans ce mémoire.

DÉFINITION 2. *L'application f est dite de type d'homologie simple, si ses ensembles critiques constituent une suite simple*

$$(5) \quad Y_0 \supset Y_1 \supset \cdots, \quad \bigcap_{q=0}^{\infty} Y_q = \emptyset \quad (Y_0 = Y),$$

chaque espace Y_q étant localement connexe.

Un ensemble ordonné comme celui des entiers est dit suite simple, d'où la terminologie de la définition; vu le Théorème A de III de l'Introduction ces applications s'avèrent effectivement assez simples du point de vue de la cohomologie.

La condition de la définition revient à exiger d'abord qu'il n'y ait pas d'ensemble critique d'indice transfini. Cela entraîne que l'intersection des Y_q , q entier, est vide, et que Y_q est un fermé rare de Y_p , si $q > p$. Dans certains résultats on n'utilise pas la connexité locale des Y_q . Toutefois, nous allons considérer les faisceaux $\mathfrak{F}|(Y_q - Y_{q+1})$, et appliquer le Théorème 2 du n° 3, d'où la nécessité de la dernière hypothèse de la définition.

En résumant des résultats du Chapitre 1 nous trouvons les propriétés suivantes d'une application de type d'homologie simple:

Nos hypothèses impliquent en particulier que $Y (= Y_0)$ est localement connexe. Notons Y_{0q} les composants connexes de $Y - Y_1$. $\mathfrak{F}|Y_{0q}$ étant dépourvu de points critiques dans un espace localement connexe, $\mathfrak{F}(y) = H(f^{-1}y)$ est une algèbre indépendante du point $y \in Y_{0q}$ à un automorphisme près. $\pi_1(Y_{0q}, y)$ opère dans cette algèbre; ces opérations déterminent un système de coefficients locaux (un faisceau localement constant). L'ensemble critique Y_1 est déterminé sans ambiguïté; c'est un fermé rare de Y (de plus, dans les cas usuels, si, par exemple, Y est un polyèdre, ou une variété, la dimension de Y_1 est inférieure à celle de Y). Cet ensemble est caractérisé par la propriété suivante: si y traverse Y_1 les sections du faisceau ne donnent pas des isomorphismes entre les $H(f^{-1}y)$ (quoi qu'il peut arriver que $H(f^{-1}y)$ et $H(f^{-1}z)$ soient isomorphes comme algèbres pour $y \in Y_{0p}$, $z \in Y_{0q}$, $p \neq q$). La restriction de f à $X_1 = f^{-1}(Y_1)$ est une application de type d'homologie simple, et nous pouvons recommencer la construction précédente. A vrai dire il faut même la recommencer, car autrement on n'aurait pas une description fidèle de la structure de f .

De proche en proche nous détachons ainsi des parties de Y , au dessus desquelles l'action de f est aussi simple du point de vue homologique que celle de la projection d'un espace fibré. A côté de ces parties de $Y_q - Y_{q+1}$ nous faisons en même temps apparaître les ensembles critiques de l'application.

Nous ignorons, si la classe des applications de type d'homologie simple peut être caractérisée par des propriétés qui ne portent pas directement sur les ensembles critiques. Toutefois, nous pouvons donner deux classes d'applications satisfaisantes à nos hypothèses.

I. *Applications simpliciales.* Nous prouvons d'abord le

LEMME 2. *Soit $f: X \rightarrow \bar{s}$ une application simpliciale d'un complexe simplicial localement fini X sur un simplexe fermé $\bar{s}$. Notons s l'intérieur de $\bar{s}$ (s est un simplexe ouvert), et posons $E = f^{-1}(s)$. Cet espace est un produit*

$$(6) \quad E = F_z \times s, \quad \text{et} \quad f(x', y) = y \quad (x' \in F_z, y, z \in s),$$

où z est un point fixé dans s , et $F_z = f^{-1}(z)$.

PREUVE. Soient $y_0, \dots, y_p$ les sommets de $\bar{s}$, x_{ij} ceux de X , numérotés de façon que $f(x_{ij}) = y_i, i = 0, \dots, p$. Si (a_{ij}) sont les coordonnées barycentriques de $x \in X$, a_{ij} étant le poids placé au point x_{ij} , alors les coordonnées barycentriques b_i de $f(x)$ sont

$$(7) \quad b_i = \sum_j a_{ij}.$$

$$(8) \quad x \in E \text{ équivaut } b_i > 0 \text{ pour } i = 0, \dots, p.$$

Soit $z = (c_{ij})$ un point donné de s et définissons une application $g: E \rightarrow F_z \times s$ comme suit: Au point $x = (a_{ij})$ de E faisons correspondre le point $g(x) = (x', f(x))$ du produit, où $x' = (a'_{ij})$, et

$$(9) \quad a'_{ij} = c_i(a_{ij}/b_i) \quad (\text{cf. (7), (8)}).$$

$a_{ij} = 0$ entraîne $a'_{ij} = 0$, x' appartient donc à F_z . Selon (9) g est biunivoque. De plus, si nous posons $h(x', y) = y$, nous aurons $hg = f$. La preuve du lemme est donc complète.

PROPOSITION 1. *Soient X, Y des complexes simpliciaux localement finis, et $f: X \rightarrow Y$ une application simpliciale. Les ensembles critiques de f sont des sous-complexes fermés rares de Y , f est donc de type d'homologie simple. Si $\dim Y \leq n$, le $(n+1)$ -ième ensemble critique de f est vide.*

PREUVE. Convenons de dire qu'un simplexe de Y est maximal, s'il n'est pas la face au sens strict d'un autre simplexe de Y . Le complémentaire des simplexes maximaux ouverts est sous-complexe fermé Y^* de Y . Selon le Lemme 2 la restriction de f à $X - X^* = X - f^{-1}(Y^*)$ n'a pas de valeurs critiques, donc $Y_1 \subset Y^*$, où Y_1 est le premier ensemble critique de f . (En particulier, si $\dim Y \leq n$, alors $\dim Y_1 \leq n - 1$.) Si un point intérieur d'un simplexe de Y^* est une valeur non critique de f , il en est de même pour les autres points intérieurs de ce simplexe, vu le Lemme 2. Il est donc aisé de prouver que Y_1 est un sous-complexe fermé de Y . Cela dit, la Proposition 1 se démontre d'une façon évidente par induction.

II. *Applications de type d'homologie fini.* Elles sont définies comme suit (cf. Définition 1 du n° 4):

DÉFINITION 3. Une application f est dite de type d'homologie fini, si son faisceau image $\mathfrak{F}$ est de type fini.

Explicitons cette définition: Si f est de type d'homologie fini, il existe: 1° une base $\beta = \{U\}$ d'ouverts de Y , telle que $H(f^{-1}\bar{U})$ soit engendré par un nombre fini de classes de cohomologie pour tout $U \in \beta$ (cf. Proposition 3 du n° 5); 2° il existe un recouvrement ouvert $\rho = \{V\}$ de Y , les adhérences $\bar{V}$ des $V \in \rho$ constituant un recouvrement fini en chaque point, et tel qu'à tout $y \in Y$ on puisse trouver un ouvert $V \in \rho$ contenant y , tel que $H(f^{-1}y)$ soit la section de $H(f^{-1}\bar{V})$ par le fermé $f^{-1}(y)$ de X . Cette seconde condition peut être remplacée par une condition plus exigeante, mais plus maniable dans la pratique: on peut exiger que tout $f^{-1}(y)$ soit rétracte par déformation d'un $f^{-1}(V)$ le contenant, où $V \in \rho$.

Il est aisé de démontrer qu'une application simpliciale *propre* est de type d'homologie fini. Certaines applications différentiables le sont, alors qu'il était malaisé d'établir qu'elles sont des applications simpliciales (si elles le sont). Il est donc utile de garder séparément ces classes d'applications.

La proposition suivante est un corollaire banal du Théorème 1 du n° 4:

PROPOSITION 2. Si f est une application de type d'homologie simple, son plus petit ensemble critique est vide. Pour que f soit de type d'homologie simple, il faut et il suffit que ses ensembles critiques (non vides) soient localement connexes, et d'indice fini.

9. Rappel de la construction de l'algèbre spectrale d'une application

PRÉAMBULE. Envisageons une application continue

$$(1) \quad f: X \rightarrow Y$$

d'un espace dans un autre. Si pour tout compact C de Y $f^{-1}(C)$ est un compact de X , f est appelé *propre*, et elle induit classiquement un homomorphisme

$$(2) \quad f^{-1}: H(Y) \rightarrow H(X)$$

(qu'on note parfois f^*). Dans la théorie de J. Leray la construction de f^{-1} de (2) est basée sur la

PROPOSITION 1. Soit $[L]$ un complexe canonique sur Y . Posons

$$(3) \quad S'(l) = f^{-1}(S(l)) \quad (l \in L).$$

C'est une fonction de support définie sur L à valeurs dans X , et

$$(4) \quad (L, d, S') = f^{-1}[L]$$

est un complexe canonique sur X . Si $[L]$ est une couverture sur Y , et f est propre, $f^{-1}[L]$ est une couverture sur X .

Pour définir (2) la théorie de J. Leray utilise donc la même construction que les autres théories: il s'agit du fait bien connu que les cochaînes de Y sont transformées par f^{-1} en cochaînes de X (cf. Fáy [6], pp. 131–134).

Un des traits les plus frappants de la théorie de cohomologie de J. Leray est le fait que, non seulement les cochaînes de Y se transforment par f en cochaînes de X , mais RÉCIPROQUEMENT les cochaînes de X se transforment par f en cochaînes de Y , pourvu que le mot "cochaîne" soit pris dans un sens suffisamment général, c'est-à-dire qu'il désigne l'élément d'un complexe canonique. Précisons bien: il s'agit de la COHOMOLOGIE, et non pas de l'homologie.

En effet, nous avons la

PROPOSITION 2. *Étant donné (1) et un complexe canonique $[K]$ sur X ,*

$$(5) \quad S''(k) = f(S(k)) \quad (k \in K)$$

est une fonction de support définie sur K , à valeurs dans Y , pourvu que $[K]$ soit à supports compacts (ou que f soit fermé). Dans ce cas

$$(6) \quad (K, d, S'') = f[K]$$

est un complexe canonique sur Y .

Bref, à tout complexe canonique sur X correspond un complexe canonique sur Y . Envisageons à présent le cas, où $[K]$ est une *couverture* sur X . Le complexe canonique (6) ne sera pas, en général, une couverture sur Y . Par image directe les couvertures ne sont pas conservées. Toutefois, si $[K]$ est une couverture fine sur X , nous avons la

PROPOSITION 3. *Utilisons les notations de la Proposition 2, et supposons que $[K]$ est une couverture fine sur X . Nous avons alors*

$$(7) \quad H(yfK) = H(f^{-1}y)$$

en tout point y de Y , indépendamment du choix de la couverture fine $[K]$ de X . De façon précise: le faisceau de cohomologie du complexe canonique $f[K]$ sur Y est le faisceau image $\mathfrak{F}$ de f (cf. Définition 2 du n° 6).

En résumant ces propositions nous pouvons former le tableau que voici:

$$(8) \quad \begin{array}{ccc} [K] & & f[K] \\ f^{-1}[L] & & [L] \\ X & \xrightarrow{f} & Y \end{array}$$

analogue à (12) du n° 1. (Tous les symboles ne sont définis que dans le cas favorable.) Si $[K]$, $[L]$ sont des couvertures fines, nous avons des complexes canoniques dans la première ligne de (8), et des couvertures dans la seconde ligne de ce tableau.

Pour que (6) soit une couverture fine sur Y , il faut et il suffit que $f^{-1}(y)$ soit compact, connexe, non vide, et à cohomologie nul en degré ≥ 1 en tout point y de Y . Dans ce cas le Théorème fondamental du n° 5 donne immédiatement un théorème de Vietoris: (2) est un isomorphisme $H(Y) \approx H(X)$. Ce théorème est donc un corollaire évident de la définition même de l'algèbre de cohomologie (cf. Leray [1], p. 1421).

Pour que le Théorème fondamental du n° 6 s'applique de la même façon que celui du n° 5 ci-dessus, il faut et il suffit que

$$(9) \quad H^p(f^{-1}y) = 0, \quad \text{si } p \geq 1$$

en tout point y de Y . Nous avons donc: Si (9) est valable, $H(Y, \mathfrak{F})$, algèbre de cohomologie de Y par rapport au faisceau image de f , est isomorphe à $H(X)$. Un important cas particulier, où (9) est valable, est le suivant: X est un revêtement de Y , et f est la projection. Si nous désignons alors par $\mathcal{C}$ le faisceau localement constant défini dans Y qui est ponctuellement isomorphe à $\mathfrak{F}$, nous avons un isomorphisme $H(Y, \mathcal{C}) \approx H(X)$ entre deux invariants classiques.⁹

Si l'on ne fait pas d'hypothèses concernant $\mathfrak{F}$, la situation est plus compliquée, car $\mathfrak{F}^p$, $p \geq 1$ peut être non nul en certains points, et le Théorème fondamental du n° 6 ne s'applique plus de cette façon simple.

Or, grâce à la théorie de l'algèbre spectrale, J. Leray a tourné cette difficulté, et il a réussi à établir des relations entre $H(Y, \mathfrak{F})$ et $H(X)$. Voici comment:

On peut choisir une filtration d'une certaine couverture fine $[M]$ de X de façon qu'un terme E_r de l'algèbre spectrale qui se déduit de cette filtration ait les propriétés suivantes: si l'on munit E_r d'un degré convenable et de la différentielle d_r , il est un complexe canonique sur Y , tel que

$$(10) \quad H^p(yE_r) = 0, \quad \text{si } p \geq 1, \quad \text{en tout point } y \in Y.$$

Grâce à (10) on peut alors appliquer le Théorème fondamental du n° 6: le terme $E_{r+1} = H(E_r)$ de l'algèbre spectrale est un invariant topologique de f , ainsi que toute la suite E_s , $s \geq r + 1$.

Pour un choix convenable des données on aura l'algèbre spectrale du Théorème 1 ci-dessous rappelé: $r = 1$, et $E_2 = H(Y, \mathfrak{F})$, car le faisceau de cohomologie du complexe canonique $[E_1]$ défini sur Y est précisément le faisceau image $\mathfrak{F}$ de f . C'est cette algèbre spectrale qu'on utilise en théorie des espaces fibrés.

Fait important pour nous: les données de la construction peuvent être autrement choisies. Dans la preuve du Théorème A de l'Introduction nous utilisons ce fait.

RAPPEL D'UN THÉORÈME DE J. LERAY. Le théorème en question s'énonce comme suit:

THÉORÈME 1. Soit $f: X \rightarrow Y$ une application continue donnée, et notons par $\mathfrak{F}$ son faisceau image (cf. (2)–(4) du n° 8). L'application f détermine: 1° une filtration de $H(X)$, dont l'algèbre graduée est notée $GH(X)$; 2° une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que

$$(11) \quad E_2 = H(Y, \mathfrak{F}) \quad (\text{ALGÈBRE de cohomologie})$$

$$(12) \quad E_\infty \supset GH(X).$$

$H^p(Y, \mathfrak{F}^q)$ est le module des éléments de degré filtrant p et de degré canonique $p + q$. Dans le cas favorable (si, par exemple, $\dim Y < \infty$),

$$(13) \quad E_r = GH(X)$$

pour les r suffisamment élevés ($> \dim Y$).

⁹ Dans certains cas cette remarque peut être utile pour calculer $H(Y, \mathcal{C})$ grâce à la connaissance de $H(X)$, ou vice versa, contrairement à ce qu'on a affirmé ailleurs.

Dans la formule de Leray ([4], p. 91, (50.2)) nous posons: $\mathcal{B}$: faisceau constant isomorphe à l'anneau des coefficients A ; $m = 1$; $l = 0$. Le faisceau $\mathcal{B}$ étant constant, $f^*\mathcal{C}_X = \mathcal{F}$ est le faisceau de coefficients figurant dans la formule citée; nous avons à utiliser la différentielle d de l'espace Y , donc (12) du n° 6 prouve que E_2 est donné par (11). Cela complète la preuve du théorème.

Nous voulons encore rappeler la construction de la couverture fine de X , et la définition de sa filtration dans le présent cas ($\mathcal{B}$ constant, $m = 1$, $l = 0$). Vu que nos couvertures peuvent avoir un anneau des coefficients quelconque, nous pouvons omettre le faisceau $\mathcal{B}$ de l.c.

Soit $[K]$ une A -couverture fine de X , et $[L]$ une Z -couverture fine de Y . Dans le tableau (8) nous pouvons alors former les intersections

$$(14) \quad [f^{-1}L] \circ [K] = [L \circ K] \quad \text{sur } X$$

$$(15) \quad [L] \circ [fK] = [L \circ K] \quad \text{sur } Y$$

(ces complexes canoniques ont la même algèbre notée $L \circ K$). (14) est une couverture fine sur X , (15) est un complexe canonique sur Y . Notons encore que l'algèbre $L \circ K$ est un quotient du produit tensoriel $L \otimes K$ (produit formé sur l'anneau Z).

N'importe quelle filtration de $L \circ K$ donne lieu à une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que (12) soit valable, puisque $L \circ K$ est l'algèbre d'une A -couverture fine (14) sur X .

Nous choisissons à présent la filtration de cette algèbre spectrale de façon que (11) soit valable. A cet effet nous définissons les idéaux

$$(16) \quad (L \circ K)_p = \sum_{i \geq p} L^i \circ K,$$

qui sont d'ailleurs des facteurs directs du module de $L \circ K$. Les idéaux (16) définissent une filtration de $L \circ K$ selon (4), (6) du n° 7. Celle-ci détermine une algèbre spectrale jouissant des propriétés énoncées dans le Théorème 1. La preuve de ce fait utilise surtout la théorie algébrique de J. Leray.

10. Algèbre spectrale d'une application de type d'homologie simple

Le présent n° donne la preuve du Théorème A de III de l'Introduction, et complète son énoncé par d'autres résultats. La démonstration du théorème en question est basée d'une part sur les développements du Chapitre 1 concernant la structure des faisceaux, d'autre part sur la théorie de l'anneau spectral d'homologie d'une application continue, due à J. Leray. Nous n'avons qu'à modifier la construction rappelée dans le n° précédent, pour obtenir l'algèbre spectrale (5), (6) de l'Introduction.

Le seul cas qui nous sera utile dans les énoncés suivants est celui où f est de type d'homologie simple, et les Y_q sont ses ensembles critiques. Toutefois, les propriétés de ces données particulières n'interviennent pas jusqu'à la preuve du Théorème A de l'Introduction, il est donc préférable de donner les énoncés généraux.

THÉORÈME 1. *Soient donnés: a. une application continue $f: X \rightarrow Y$; b. une*

suite simple de fermés

$$(1) \quad Y_0 \supset Y_1 \supset \dots, Y_0 = Y, \quad \bigcap_{q=0}^{\infty} Y_q = \emptyset$$

de Y . Ces données déterminent: 1° une filtration de $H(X)$, dont l'algèbre graduée est notée $GH(X)$; 2° une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que

$$(2) \quad E_2 = \sum_{q \geq 0} H(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F})$$

$$(3) \quad E_{\infty} \supset GH(X).$$

Un élément de $H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}^t)$ est homogène de degré canonique $p + t$, et de degré filtrant $p - q$. Si $h_i \in H(Y - Y_1, \mathfrak{F})$, et $k_j \in H(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F})$, $q \geq 1$ sont des éléments de E_2 , leurs produits dans l'algèbre spectrale est l'élément $h_1 h_2$ de $H(Y - Y_1, \mathfrak{F})$, et 0 pour les produits $h_1 k_1, k_1 h_1, k_1 k_2$.

PREUVE. Nous la divisons en quatre parties. Dans la première, notée A nous définissons un faisceau filtré $\mathcal{A}$ sur X , dont la filtration sera déterminée par les fermés

$$(4) \quad X_q = f^{-1}(Y_q) \quad (q = 0, 1, \dots)$$

de X . Dans B nous étudions le faisceau spectral de cohomologie de $\mathcal{A}$, et de son image $f\mathcal{A}$, qui est un faisceau sur Y . Dans C nous construisons une couverture $[M]$ sur X , munie d'une certaine filtration. Dans D nous achevons la preuve en montrant que la filtration de $[M]$ donne l'algèbre spectrale (2), (3) selon un résultat de Leray [4].

A. Soit $\mathcal{A}$ un faisceau constant sur X : $\mathcal{A}(F) \approx A$ pour tout fermé F de X , où A est l'anneau des coefficients. Nous munissons $\mathcal{A}$ de la filtration non multiplicative ε :

$$(5) \quad \begin{aligned} &\text{si } F \text{ est un fermé de } X, a \in \mathcal{A}(F), a \neq 0, \text{ et } F \text{ rencontre } X_q, \\ &\text{mais ne rencontre pas } X_{q+1}, \text{ alors } \varepsilon(a) = -q. \end{aligned}$$

Le faisceau gradué associé à cette filtration sera

$$\mathcal{A}' = \sum_{q \geq 0} \mathcal{A}_q \quad (\mathcal{A}': \text{faisceau gradué de } \mathcal{A}),$$

où les éléments non nuls de $\mathcal{A}_q$ ont le degré filtrant $-q$. On a

$$(6) \quad \mathcal{A}_q(x) = \begin{cases} A, & \text{si } x \in X_q - X_{q+1} \\ 0, & \text{sinon.} \end{cases}$$

La multiplication de $\mathcal{A}_0$ soit celle de $\mathcal{A} \mid (X - X_1)$; pour $q \geq 1$ le produit de deux éléments quelconques de $\mathcal{A}_q$ soit nul. Avec cette convention ε de (5) devient une filtration (au sens multiplicatif).

B. Soit $[K]$ une couverture fine de X , dont l'anneau des coefficients est l'anneau des entiers, et telle que xK est sans torsion en tout point x de X . Formons l'intersection $K \circ \mathcal{A}$ selon la Proposition 1 du n° 6. La filtration de $\mathcal{A}$, et la filtration identiquement nulle sur K donne une filtration sur $K \circ \mathcal{A}$ (Leray [4], Défini-

tion 35.1, p. 62) que nous pouvons définir directement comme suit: Filtrons les sections $x(K \circ \mathcal{A})$, $x \in X$:

$$(7) \quad \text{si } a \in K \circ \mathcal{A}, \quad x \in X_q - X_{q+1}, \quad xa \neq 0, \quad \text{alors } \varphi_x(xa) = -q;$$

posons ensuite

$$(8) \quad \varphi(a) = \min_x \varphi_x(xa).$$

Cela définit une filtration sur le complexe canonique $[K \circ \mathcal{A}]$ (cf. (7), (8) et (32), (33) du n° 7).

Cela posé, nous envisageons le faisceau spectral de cohomologie du faisceau filtré $\mathcal{A}$. Cela veut dire: La filtration (8) de la couverture $K \circ \mathcal{A}$ définit une filtration sur les sections $F(K \circ \mathcal{A})$ pour tout fermé F de X ($\varphi(Fa)$ est donné par le second membre de (8) quand x décrit F). Donc $F(K \circ \mathcal{A})$ est une algèbre canonique filtrée, d'où une algèbrespectrale notée $\{\mathcal{H}_r(F)\}$. Les algèbres $\mathcal{H}_r(F)$ constituent un faisceau $\mathcal{H}_r$, car les sections $\mathcal{H}_r(E) \rightarrow \mathcal{H}_r(F)$, $E \supset F$ sont définies, vu que la section augmente la filtration. $\{\mathcal{H}_r\}$ est appelé faisceau spectral de cohomologie du faisceau filtré $\mathcal{A}$. Nous utiliserons seulement les images de ces faisceaux par f . Notons d'abord:

$$(9) \quad \text{Si } F \subset X_q - X_{q+1}, \mathcal{H}_r(F) = \mathcal{H}_1(F) = H(F), \text{ les différentielles } d_r, r \geq 1 \text{ étant nulles. Les éléments non nuls de } \mathcal{H}_1(F) \text{ sont de degré filtrant } -q.$$

Pour prouver (9) il suffit de remarquer que $x(F(K \circ \mathcal{A}))$, $x \in F$, a une filtration constante $-q$. (N.B. dire qu'une filtration est nulle, constante, etc., c'est dire qu'elle est nulle, constante, etc. pour les éléments non nuls.) Donc la filtration de $F(K \circ \mathcal{A})$ est constante $-q$. Or, d_r , $r \geq 1$ augmente le degré filtrant, elle doit donc être nulle. Cela prouve (9).

Posons $\mathcal{G}_r = f\mathcal{H}_r$; $\{\mathcal{G}_r\}$ est un faisceau spectral sur Y . Vu (9), nous avons:

$$(10) \quad \begin{aligned} &\text{Si } y \in Y_q - Y_{q+1}, \mathcal{G}_r(y) \text{ est homogène de degré filtrant } -q. d_r \text{ est} \\ &\text{identiquement nul sur } \mathcal{G}_r(y) \text{ pour } r \geq 1; \text{ donc } \mathcal{G}_r(y) = \mathcal{G}_1(y) = \mathcal{F}(y). \end{aligned}$$

C. Soit $[L]$ une Z -couverture fine de Y , telle que yL soit sans torsion en tout point y de Y . Formons l'image réciproque $f^{-1}[L]$, qui est un complexe canonique sur X satisfaisant tous les axiomes de la définition des couvertures à cela près que ses supports ne sont pas compacts. Construisons l'intersection

$$(11) \quad M = (f^{-1}L) \circ K \circ \mathcal{A}.$$

M est l'algèbre d'une A -couverture fine sur X . Si nous munissons donc M d'une filtration quelconque, et nous notons $\{E_r\}$ l'algèbre spectrale correspondante, nous aurons

$$E_\infty \supset GH(X),$$

où le second membre est une algèbre graduée de $H(X)$.

Cela posé, nous définissons une filtration χ sur M en convenant :

$$(12) \quad \chi_x(xa) \geq p \text{ équivaut } xa \in \sum_{i \geq p} x[(f^{-1}L^i) \circ K \circ \alpha]$$

$$(13) \quad \chi(a) = \min_x \chi_x(xa) \quad (a \in M)$$

(cf. (12) et (16) du n° 9). On pourra appeler χ filtration induite par les degrés de L .

L'algèbre spectrale (2), (3) s'obtient à partir d'une filtration ψ de M , qui est définie à l'aide de φ et χ . Soit

$$(14) \quad \psi_x(xa) = \chi_x(xa) + \varphi_x(xa) \quad (a \in M)$$

$$(15) \quad \psi(a) = \min_x \psi_x(xa).$$

Selon (14) nous avons, bien entendu,

$$\text{si } x \in X_q - X_{q+1}, \quad \psi_x(xa) = \chi_x(xa) - q.$$

D. Cela posé, nous utilisons la formule de Leray ([4], p. 91 (50.2)). Nos données ci-dessus correspondent au cas suivant : le faisceau $\mathcal{B}$ de l.c. est le faisceau $\mathcal{A}$ muni de la filtration ε de (5) et dépourvu de différentielle (dans la terminologie de l.c. cela s'exprime en disant que $\mathcal{A}$ est filtré canonique, de degré canonique nul); on pose $m = 1$, et $l = 0$. Nous avons alors $m + 1 = 2$, et

$$(16) \quad E_2 = H(Y \circ f\mathcal{H}_1) = H(Y \circ \mathcal{G}_1)$$

(cf. Proposition 3 du n° 6, et les remarques qui la suivent). Selon l.c. on utilise la différentielle d d'une couverture fine de Y , et la différentielle d_1 du faisceau spectral $\{\mathcal{G}_r\}$ dans le second membre de (16) (cf. (10), et (18), (19) du n° 6). Utilisons la couverture fine $[L]$ sur Y , et calculons cette différentielle de $L \circ \mathcal{G}_1$. Selon (19) du n° 6 nous avons

$$(17) \quad yd(l \circ g) = (ydl) \circ (yg) \pm (yl) \circ (yd_1g) \quad (l \in L, g \in \mathcal{G}_1(S(l))).$$

Or, selon (10) d_1 est identiquement nul sur $\mathcal{G}_1(y)$, donc

$$(18) \quad yd(l \circ g) = (ydl) \circ (yg).$$

C'est précisément la formule (12) de la Proposition 1 du n° 6. Autrement dit : dans le second membre de (16) on calcule l'algèbre de cohomologie en formant l'intersection d'une couverture fine de Y et du faisceau non différentiel $\mathcal{G}_1$ selon la Proposition 1 du n° 6, donc

$$(19) \quad E_2 = H(Y, \mathcal{G}_1)$$

selon les notations introduites dans le n° 6. Utilisons ensuite (10)

$$(20) \quad H(Y, \mathcal{G}_1) = \sum_{q \geq 0} H(Y, \mathcal{G}_{1q})$$

où $\mathcal{G}_{1q}$ désigne le faisceau des éléments de degré filtrant $-q$, donc

$$(21) \quad \mathcal{G}_{1q}(y) = \begin{cases} \mathcal{F}(y), & \text{si } y \in Y_q - Y_{q+1} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Les formules (19)–(21) donnent l'expression (2) du second terme de l'algèbre

spectrale. Vu la multiplication définie dans (6) nous avons les propriétés multiplicatives formulées dans le théorème, dont la preuve est ainsi complète.

Quelquefois il est utile d'avoir la formule explicite

$$(22) \quad E_2^p(l) = \sum_{i,j; i-j=p} H^i(Y_j - Y_{j+1}, \mathfrak{F}^{l-i})$$

pour le module des éléments de degré filtrant p et de degré canonique l de E_2 . Selon la théorie générale les règles de degrés des différentielles sont alors les suivantes

$$(23) \quad d_2: H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}^{l-p}) \rightarrow \sum_{i-j=p-q+2} H^i(Y_j - Y_{j+1}, \mathfrak{F}^{l-i+1})$$

et des formules analogues pour d_r . Dans le Théorème 2 ci-dessous nous allons montrer que le second membre de (23) se réduit à deux termes en réalité, car les composantes de $d_2(h)$ dans les autres termes sont zéros. Les énoncés ci-dessous préparent la preuve de ce théorème, et relient les invariants du Théorème 1 avec d'autres données, plus faciles à calculer dans certains cas.

Nous pouvons attacher des triangles exacts

$$(24) \quad \begin{array}{ccc} H(X_{q-1} - X_{q+1}) & \xrightarrow{\quad} & H(X_q - X_{q+1}) \\ & \nwarrow & \swarrow \delta_q \\ & H(X_{q-1} - X_q) & \end{array}$$

aux espaces différences de la suite $\{X_q\}$ définie dans (4). Cette suite de fermés de X détermine en outre la filtration suivante de $H(X)$:

$$(25) \quad \varphi(h) \geq -q, \quad h \in H(X), \quad \text{équivalent} \quad X_{q+1}h = 0.$$

Notons que c'est la filtration de (28) du Lemme 1 du n° 7 dans le cas, où $\mathcal{A}$ est le faisceau constant $\approx A$.

Cela étant, rappelons que dans certains problèmes de la théorie des valeurs critiques des fonctions numériques on utilise la suite spectrale de l'énoncé suivant (cf. Leray [4], Introduction lg, p. 6):

PROPOSITION 1. Soit donné une suite simple décroissante de fermés

$$(26) \quad X_0 \supset X_1 \supset \cdots; \quad X_0 = X, \quad \bigcap_{q \geq 0} X_q = \emptyset$$

de l'espace X . La suite (26) détermine la filtration non multiplicative (25) de $H(X)$ et une algèbre spectrale $\{E_r\}$, telle que

$$(27) \quad E_1 = \sum_{q \geq 0} H(X_q - X_{q+1})$$

$$(28) \quad E_\infty \supset GH(X)$$

où le second membre de (28) est l'algèbre graduée attachée à la filtration (25). Les éléments non nuls de $H^l(X_q - X_{q+1})$ sont de degré canonique l et de degré filtrant $-q$. La multiplication dans E_1 est celle de $H(X - X_1)$ pour les éléments du premier terme du second membre de (27), et la multiplication nulle pour les autres éléments. Pour le second terme de l'algèbre spectrale on a:

$$(29) \quad E_2 = \sum_{q \geq 0} (\text{Noyau de } \delta_q) / \delta_{q+1} H(X_{q+1} - X_{q+2})$$

où les δ_q sont les cobords des triangles exacts (24).

PREUVE. Nous utilisons le Lemme 1 du n° 7 avec les données suivantes: 1° $\mathfrak{A}$ est un faisceau constant, $\mathfrak{A}(E) \approx A$ pour tout fermé E de X ; 2° la suite des sous-espaces, qui figure dans le lemme cité est (26). Les conclusions du Lemme 1 du n° 7 donnent alors immédiatement l'algèbre spectrale (27), (28), puisque $H(X_q - X_{q+1}, \mathfrak{A}) = H(X_q - X_{q+1})$. L'expression (29) s'obtient à partir de (11)–(14) du n° 7; nous ne donnerons pas la preuve, puisque nous n'utiliserons pas cette relation. Notons à ce propos que l'on peut donner certaines précisions concernant les autres termes de cette algèbre spectrale.

PROPOSITION 2. Soit E_* l'algèbre spectrale du Théorème 1, et notons E'_* celle de la Proposition 1, où la suite (26) est définie par (4). Il existe un homomorphisme naturel

$$(30) \quad E'_* \rightarrow E_*$$

d'algèbres spectrales.

PREUVE. Pour construire l'algèbre spectrale E'_* de la Proposition 1 utilisons la couverture fine $(f^{-1}L) \circ K$ dans la preuve de celle-ci (c'est-à-dire dans la preuve du Lemme 1 du n° 7). La filtration ψ de (15) est alors $\geq \varphi$, où φ est la filtration (32), (33) du n° 7, qui donne lieu à l'algèbre spectrale E'_* . D'où (30) selon la théorie générale d'homomorphismes d'algèbres spectrales.

Convenons de désigner $E(f)$, $E(f|X_{q+1})$, $E(f|X - X_{q+1})$ les algèbres spectrales que le Théorème 1 attache aux applications f , $f|X_{q+1}$, $f|(X - X_{q+1})$, et aux suites Y_s , $s = 0, 1, \dots, Y_s$, $s = q + 1, \dots, Y_s - Y_{q+1}$, $s = 0, \dots, q + 1$ respectivement. (N.B. Si les Y_s sont les ensembles critiques de f , il s'agit simplement des restrictions de f à X , X_{q+1} , $X - X_{q+1}$ respectivement, vu la Proposition 3 du n° 3.) Nous allons former un triangle d'homomorphismes

$$(31) \quad \begin{array}{ccc} E(f) & \xrightarrow{\sigma} & E(f|X_{q+1}) \\ \swarrow v & & \searrow \delta \\ & E(f|X - X_{q+1}) & \end{array}$$

d'algèbres spectrales. Ce triangle n'est pas exact en général, mais

$$(32) \quad \sigma v = 0, \quad \delta \sigma = 0, \quad v \delta = 0$$

est valable.

La définition de v et celle de σ est banale: Posons $V = Y - Y_{q+1}$, $U = f^{-1}(V)$, et désignons par L_V , etc. les éléments de L à supports dans V , etc. (cf. (12) du n° 5). Nous avons alors:

$$(33) \quad (f^{-1}L_V) \circ K_U \circ \mathfrak{A} \subset (f^{-1}L) \circ K \circ \mathfrak{A}$$

$$(34) \quad X_{q+1}((f^{-1}L) \circ K \circ \mathfrak{A}) = ((f^{-1}L) \circ K \circ \mathfrak{A}) / (f^{-1}L_V \circ K_U \circ \mathfrak{A})$$

d'où la définition de v , σ .

Le δ de (31) est une application linéaire augmentant le degré canonique et le degré filtrant d'une unité.

Voici sa définition (qui ne sera d'ailleurs pas utilisée dans la suite):

$$(35) \quad C_r'^p, D_r'^p \text{ sont définis selon (9), (10) du n° 7 à partir de (33)}$$

$$(36) \quad C_r''^p, D_r''^p \text{ sont définis selon (9), (10) du n° 7 à partir de (34)}.$$

Donnons nous $h \in E(f | X_{q+1})$, choisissons $a'' \in C_r''^p$ dans la classe h , et posons $F = S(a'')$; soit $a \in M$ (cf. (11)), tel que $a'' = X_{q+1}a$. Choisissons un $v \in L^0$, tel que, si $u = f^{-1}(v)$, Fu soit l'unité de $F(f^{-1}L)$, et que $\psi(xa) \geq p$, $\psi(xda) \geq p + r$, quel que soit $x \in S(u)$. Cela étant, nous définissons

$$(37) \quad \delta h = (du)a \bmod (C_{r-1}'^{p+2} + D_{r-1}'^{p+1})$$

(cf. (11) du n° 7). On vérifie facilement la légitimité de cette définition. Si $f: X \rightarrow X$ est l'application identique, δ est le cobord d'un triangle exact (cf. (17) du n° 6).

THÉORÈME 2. *Utilisons les notations du Théorème 1. $d_2 = d' + d''$ est la somme directe de deux applications linéaires*

$$(38) \quad d': H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}) \rightarrow H^{p+1}(Y_{q-1} - Y_q, \mathfrak{F}),$$

$$(39) \quad d'': H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}) \rightarrow H^{p+2}(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}).$$

L'application d' est le cobord d'un triangle exact en cohomologie par rapport à un faisceau (cf. (16) du n° 6). L'application d'' est la seconde différentielle de l'algèbre spectrale que le Théorème 1 du n° 9 attache à la restriction de f à $X_q - X_{q+1}$. En outre

$$(40) \quad d'd' = 0, \quad d''d'' = 0, \quad d'd'' = -d''d'$$

est valable.

PREUVE. Nous envisageons la couverture fine M de (11) de l'espace X munie des filtrations que voici:

$$(41) \quad -\varphi(k) = \max_{S(k)} \cap_{X_t \not\subseteq \phi} t \quad (\text{cf. (7), (8)})$$

$$(42) \quad \chi(k) = \min_x \chi(xk)$$

$$\chi(xk) \geq t \text{ équivaut } xk \in \sum_{i \geq t} x(f^{-1}L^i) \otimes xK \otimes \mathfrak{A}(x)$$

$$(43) \quad \psi(k) = \min_x \psi(xk) \quad (\text{cf. (14), (15)})$$

$$\psi(xk) = \chi(xk) + \varphi(xk).$$

L'algèbre spectrale $\{E_r\}$ est définie par ψ . Selon (9), (10) du n° 7 nous attachons C_r^p, D_r^p à M muni de la filtration ψ . Vu la définition de l'algèbre spectrale (cf (11) du n° 7) il existe donc un homomorphisme

$$(44) \quad \lambda_p: C_2^p \rightarrow E_2,$$

tel que $\lambda_p(C_2^p) = E_2$.

Prouvons d'abord:

$$(45) \quad \text{si } k \in C_2^p, \quad \lambda_p(k) \in \sum_s H^{p+s}(Y_s - Y_{s+1}, \mathfrak{F})$$

où s parcourt les valeurs, pour lesquelles

$$(46) \quad \chi(k) - p \leq s \leq -\varphi(k)$$

est valable. En effet, $\lambda_p(k)$ n'a que des composants de degré filtrant p , d'où (45). Pour chaque terme de la somme de (45) $p + s \geq \chi(k)$, car $\chi(k)$ est le minimum des degrés en $f^{-1}L$ des expressions de k (cf. (42)). D'où la limite inférieure pour s dans (46). La limite supérieure s'obtient en observant que $-\varphi(k)$ est le maximum des indices des espaces X_i coupant $S(k)$ selon (41).

Cela étant, soit donné

$$(47) \quad h \in H^p(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}).$$

Nous allons évaluer $d_2(h)$ en choisissant convenablement un élément de M dans la classe h .

Montrons d'abord qu'il existe un

$$(48) \quad k \in C_2^p, \text{ tel que } X_{q+1} \cap S(k) = \emptyset, \text{ et } \lambda_p(k) = h.$$

Or, le second terme de $E(f | X - X_{q+1})$ (notation de (31)) est

$$(49) \quad \sum_{s=0}^q H(Y_s - Y_{s+1}, \mathfrak{F})$$

il existe donc h' dans le second membre de (49), tel que $h = \nu h'$, où ν est l'injection du triangle (31). L'algèbre spectrale de $f | (X - X_{q+1})$ se déduit de la couverture fine $X - X_{q+1}$ que constituent les éléments de M , dont le support ne rencontre pas X_{q+1} (cf. (33)). D'où l'affirmation (48).

Dans ce qui suit nous fixons un k satisfaisant à (48).

PROPRIÉTÉ DE k : Il existe un voisinage fermé V de Y_q , tel que, si $U = f^{-1}(V)$, nous avons

$$(50) \quad \chi(Uk) \geq p + q, \quad \chi(Udk) \geq p + q + 2.$$

PREUVE DE (50): Si $x \in X_q$, $\psi(xk) = \chi(xk) + \varphi(xk)$, donc $p \leq \chi(xk) - q$, d'où $\chi(xk) \geq p + q$. De là nous obtenons: $\chi(X_q k) \geq p + q$. X_q possède donc un voisinage fermé U' , tel que $\chi(U'k) \geq p + q$. On trouve de même un voisinage fermé U'' de X_q , tel que $\chi(U''dk) \geq p + q + 2$, d'où l'existence de $U \subset U' \cap U''$ dans (50).

En utilisant cette propriété de k nous allons le "modifier hors de X_q ", et construire un élément uk de C_2^p , qui donne par λ_p la même classe h que k , et dont la différentielle sera facile à calculer (cf. (66) ci-dessous).

CHOIX DE u : Notons F le support de $X_q k$. Soit $v \in L^0$, $S(v) \subset V$ (cf. (50)), tel que, si $u = f^{-1}(v)$, Fu soit l'unité de FL .

PROPRIÉTÉS DE uk : L opère dans M de (11), uk est donc défini (cf. la définition de (17) du n° 6). Nous prouvons les inégalités suivantes:

$$(51) \quad \begin{cases} -\varphi(uk) \leq q \end{cases}$$

$$(52) \quad \varphi: \begin{cases} -\varphi(du \cdot k) \leq q - 1, & -\varphi(u \cdot dk) \leq q \end{cases}$$

$$(53) \quad \begin{cases} -\varphi(du \cdot dk) \leq q - 1 \end{cases}$$

$$\begin{aligned}
 (54) \quad & \chi(uk) \geq p + q \\
 (55) \quad & \chi(du \cdot k) \geq p + q + 1, \quad \chi(u \cdot dk) \geq p + q + 2 \\
 (56) \quad & \chi(du \cdot dk) \geq p + q + 3 \\
 (57) \quad & \psi(uk) \geq p \\
 (58) \quad & \psi(du \cdot k) \geq p + 2, \quad \psi(u \cdot dk) \geq p + 2 \\
 (59) \quad & \psi(du \cdot dk) \geq p + 4.
 \end{aligned}$$

La preuve des inégalités (51)–(53) est banale: les supports de $uk, \dots, du \cdot dk$ sont compris dans $S(k)$; or, $X_{q+1} \cap S(k) = \emptyset$ vu (48); en outre, $X_q \cap S(du \cdot k) = \emptyset$, et $X_q \cap S(du \cdot dk) = \emptyset$.

(54) est un corollaire de la première inégalité de (50).

(55) La première inégalité s'obtient en observant que le degré de du est 1, et que la première inégalité de (50) est valable ($S(du \cdot k) \subset U$). La seconde inégalité de (55) est un corollaire de la seconde inégalité de (50).

(56) On utilise la seconde inégalité de (50), et on remarque que le degré de du est 1.

(57) Si $x \notin X_q$, alors $\psi(xuk) \geq \chi(xuk) - q + 1$, et vu (54) c'est $\geq p + 1$. Si $x \in X_q$, nous pouvons supposer $x \in F$, nous avons donc $xuk = (xu)(xk) = xk$, et (50) donne l'inégalité $\psi(xuk) \geq p$. Finalement $\psi(xuk) \geq p$ pour tout x entraîne (57).

(58) Première inégalité. $X_q \cap S(du \cdot k) = \emptyset$, il suffit donc d'envisager les $x \notin X_q$. Pour un tel point $\psi(xdu \cdot k) \geq \chi(xdu \cdot k) - q + 1$, et vu (55) c'est $\geq p + 2$. Seconde inégalité. Si $x \notin U$, $\psi(xu \cdot dk) = \infty$. Si $x \in U$, $\psi(xu \cdot dk) = \chi(xu \cdot dk) + \varphi(xu \cdot dk)$ est $\geq p + q + 2 - q$.

(59) Si $x \in X_q$, $\psi(xdu \cdot dk) = \infty$, si $x \notin X_q$, on a $\psi(xdu \cdot dk) \geq \chi(xdu \cdot dk) - q + 1 \geq p + q + 3 - q + 1 = p + 4$ selon (50).

Grâce aux inégalités (57)–(59) nous avons

$$(60) \quad uk \in C_2^p$$

$$(61) \quad du \cdot k \in C_2^{p+2}, \quad u \cdot dk \in C_2^{p+2}.$$

Cela posé, nous pouvons former $\lambda_{p+2}(du \cdot k)$. Montrons

$$(62) \quad \lambda_{p+2}(du \cdot k) \in H^{p+1}(Y_{q-1} - Y_q, \mathfrak{F}).$$

En effet, la limitation de s dans (46) donne à présent: $\chi(du \cdot k) - p - 2 \leq s \leq -\varphi(du \cdot k)$. Utilisons (55) et (52): $p + q + 1 - p - 2 \leq s \leq q - 1$, donc $s = q - 1$. Cela prouve (62).

Montrons ensuite:

$$(63) \quad \lambda_{p+2}(u \cdot dk) \in H^{p+2}(Y_q - Y_{q+1}, \mathfrak{F}).$$

Écrivons l'inégalité (46): $\chi(u \cdot dk) - p - 2 \leq s \leq -\varphi(u \cdot dk)$. Donc, vu (55), (52) nous avons $p + q + 2 - p - 2 \leq s \leq q$, d'où (63).

Cela étant, montrons $\lambda_p(uk) = \lambda_p(k) = h$ de (47). Or, $\lambda_p(uk)$ est dans la somme

$$(64) \quad \sum_{s \geq q} H^{p+s}(Y_s - Y_{s+1}, \mathfrak{F}),$$

vu (45), (46), et vu que $\chi(uk) - p \geq q$ selon (54). L'élément $uk - k$ a un support, qui ne rencontre pas X_q , car $X_q uk = (X_q u)(X_q k) = X_q k$, et il appartient à C_2^p . Cela prouve que

$$(65) \quad \lambda_p(uk - k) \in \sum_{s \leq q-1} H(Y_s - Y_{s+1}, \mathfrak{F}).$$

Or, (67) et (47) montrent que $\lambda_p(uk - k)$ appartient au second membre de (64). Cela n'est compatible avec (65) que si $\lambda_p(uk - k) = 0$.

Afin de calculer la seconde différentielle $d_2(h)$ de h , nous pouvons donc représenter cette classe h par uk . Or, grâce à (4) du n° 5 la définition (13), (14) du n° 7 donne:

$$(66) \quad \begin{aligned} d_2 h &= d_2 \lambda_p(uk) = \lambda_{p+2}(d(uk)) = \lambda_{p+2}(du \cdot k) + \lambda_{p+2}(u \cdot dk) \\ &= d'h + d''h. \end{aligned}$$

Les relations (40) s'obtiennent par le développement de $(d' + d'')^2$ grâce aux propriétés de degré de d' , d'' . Cela complète la preuve du Théorème 2.

Nous spécialisons à présent ces résultats au cas, où f est de type d'homologie simple, et nous donnons la

PREUVE DU THÉORÈME A DE L'INTRODUCTION. Selon la Définition 2 du n° 8 les ensembles critiques de f constituent une suite (2) de l'Introduction;

$$\mathfrak{F} \mid (Y_q - Y_{q+1})$$

est ponctuellement isomorphe à un faisceau localement constant $\mathfrak{F}_q$ grâce au Corollaire 2 du n° 3. Selon nos résultats antérieurs ces données ont les propriétés 1°, 2° du Théorème A.

Soit l'algèbre spectrale (5), (6) de l'Introduction celle du Théorème 1 de ce n°, dans le cas, où (1) est la suite des ensembles critiques de f . Selon le Théorème fondamental du n° 7 (2) du Théorème 1 donne alors (5) de l'Introduction, puisque $\mathfrak{F} \mid (Y_q - Y_{q+1})$ et $\mathfrak{F}_q$ sont ponctuellement isomorphes. Les règles du degré et de multiplication du Théorème 1 donnent ceux du Théorème A. Le Théorème 2 donne la différentielle d_2 ; d'' est à présent analogue à la seconde différentielle de l'algèbre spectrale d'un espace fibré. La preuve du Théorème A est donc complète.

NOTES. Soit X un espace fibré, pas nécessairement connexe, B sa base supposée localement connexe, et $p: X \rightarrow B$ la projection de l'espace sur sa base. ("Espace fibré" est entendu au sens de Steenrod [1], 1.1 Provisional Definition, p. 3, ou Leray [5], p. 172; cette dernière définition suppose X connexe, mais nous ne faisons pas cette hypothèse.) L'application est alors de type d'homologie simple, puisque le premier ensemble critique est vide (Leray [5], Lemme 4.3, p. 174, et Critère 1 du n° 8). Le Théorème A de l'Introduction s'applique, et

(5), (6) du n° 1 est alors l'algèbre spectrale de Leray ([5], n° 6, p. 179) dans le cas (usuel), où $m = 1$, et $l = 0$.

Notons que dans ce cas le terme E_2 n'est pas plus simple que dans le cas général (Théorème A) : pour pouvoir calculer E_2 il faut connaître les composants connexes de B , la cohomologie des diverses fibres $f^{-1}(y)$, $y \in B$, et l'opération des groupes fondamentaux des composants connexes de B dans ces algèbres de cohomologie.

Néanmoins, dans le cas de l'application p une simplification s'introduit du fait que $\{E_r\}$ est la *somme directe* des algèbres spectrales attachées aux composants connexes de la base.

Dans le cas général (5) de l'Introduction est comme le second terme d'un espace fibré, qui est la somme directe $\bigcup_q (X_q - X_{q+1})$. Mais dans la suite les différentielles d_r "mélangent" les termes de E_2 , l'algèbre spectrale n'est pas une somme directe, comme dans le cas d'un espace fibré. Cela vient du fait que f possède des valeurs critiques. Cette remarque mérite d'attention, quand on aborde le problème de généralisation de la notion de modules critiques d'une fonction numérique aux applications de type d'homologie simple.

Nous avons prouvé que l'algèbre spectrale du Théorème A existe, si f est une application simpliciale (v. Proposition 1 du n° 8). Cela suggère une voie constructive de présenter une partie des résultats du présent mémoire comme suit :

On étudie d'abord les applications simpliciales, et on constate que le faisceau image d'une telle application est de type simple. Dans cette étude on pourra même se borner aux faisceaux dits simpliciaux, qui sont définis sur les polyèdres, et tels que leurs restrictions aux simplexes ouverts sont des faisceaux constants (cf. Lemme 2 du n° 8). On démontre ensuite le Théorème A pour les applications simpliciales en utilisant des faisceaux simpliciaux.

Dans la Topologie algébrique actuelle on se borne souvent aux polyèdres, une telle présentation pourrait donc paraître naturelle. Toutefois, elle n'est pas acceptable dans notre cas, car : 1° les invariants du Théorème A ne sont pas des invariants du type d'homotopie de f ; 2° dans la pratique on peut souvent démontrer qu'une application est de type d'homologie simple, alors qu'elle n'est pas une application simpliciale. Dans un mémoire ultérieur nous allons étudier un cas, où f est probablement une application simpliciale, mais il serait malaisé de démontrer cela, alors qu'on constate facilement qu'elle est une application de type d'homologie simple.

Une autre raison d'être du développement du Chapitre 1 est que ses résultats s'appliquent à divers problèmes, dont nous n'avons pas l'occasion de parler. Mentionnons un de ces problèmes, sans vouloir l'aborder à présent.

Soit donné une application continue quelconque $f: X \rightarrow Y$. Définissons un sous-faisceau $\mathcal{E}$ du faisceau image $\mathcal{F}$ de f en posant :

$$\mathcal{E}(F) = \{\text{image de la section } H(X) \rightarrow H(f^{-1}F)\} \quad (F \subset Y).$$

Si X est compact, $\mathcal{E}$ contient un sous-faisceau constant $\approx A$, donc

$$H(Y) \subset H(Y, \mathcal{E}) \quad (\text{si } X \text{ est compact})$$

Cela posé, rappelons que la théorie de J. Leray généralise l'homomorphisme classique $f^*: H(Y) \rightarrow H(X)$ en construisant un homomorphisme

$$\Phi: H(Y, \varepsilon)' \rightarrow GH(X) \quad (H(Y, \varepsilon)' \subset H(Y, \varepsilon)),$$

tel que

$$\text{si } X \text{ est compact, } H(Y) \subset H(Y, \varepsilon)', \text{ et } \Phi|H(Y) = f^*.$$

Or, si $H(X)$ est engendré par un nombre fini d'éléments, il est facile de prouver que ε possède une *suite finie d'ensembles critiques*. Les résultats que nous avons obtenu s'appliquent donc à l'étude de Φ (cf., par exemple, le Théorème 1 du n° 7). Par contre, si nous avions fait la théorie pour les "faisceaux simpliciaux" ci-dessus mentionnés, nous devrions nous restreindre dans cette étude aux applications simpliciales, pour la généraliser ensuite par un passage à la limite, dont on ne connaît que trop d'exemples en Topologie algébrique.

INSTITUT HENRI POINCARÉ, PARIS

BIBLIOGRAPHIE

N. BOURBAKI

- [1] Algèbre, II. Algèbre linéaire, Hermann et Cie, Paris, 1947.
- [2] Topologie générale, Fascicule des résultats, Hermann et Cie, Paris, 1953.

H. CARTAN

- [1] Séminaire de Topologie algébrique ENS, I, 1948-49 (Polycopié).
- [2] *Idéaux et modules de fonctions analytiques de variables complexes*, Bull. Soc. Math. France, 78 (1950), pp. 29-64.
- [3] Séminaire de Topologie algébrique ENS, III, 1950-51 (Polycopié).
- [4] *Variétés analytiques complexes et cohomologie*, Colloque sur les fonctions de plusieurs variables, Bruxelles, 1953.

I. FÁRY

- [1] *Sur les anneaux spectraux de certaines classes d'applications*, I, *Généralités*, C. R. Acad. Sci. Paris, 235 (1952), pp. 686-688.
- [2] II, *Fonctions numériques (continues)*, ibid. pp. 780-782.
- [3] III, *Fonctions numériques (différentiables)*, ibid. pp. 1272-1274.
- [4] IV, *Cohomologie des hypersurfaces algébriques*, ibid. pp. 1467-1469.
- [5] V, *Application $X \rightarrow X/G$. Sur le terme E_2* , C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), pp. 1224-1226.
- [6] *Notion axiomatique de l'algèbre de cohomologie dans la théorie de J. Leray*, Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), pp. 97-135.
- [7] *Sur une nouvelle démonstration de l'unicité de l'algèbre de cohomologie à supports compacts d'un espace localement compact*, C. R. Acad. Sci. Paris, 237 (1953), pp. 552-554.

S. LEFSCHETZ

- [1] *L'Analysis situs et la géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.

J. LERAY

- [1] *Sur l'anneau d'homologie d'une représentation*, C. R. Acad. Sci. Paris, 222 (1946), pp. 1366-1368.
- [2] *Structure de l'anneau d'homologie d'une représentation*, ibid., pp. 1419-1422.
- [3] *L'homologie filtrée*, Colloques internationaux du CNRS, XII, Topologie Algébrique, Edition du CNRS, Paris, 1949, pp. 61-68.
- [4] *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue*, J. Math. Pures Appl., 39 (1950), pp. 1-139.
- [5] *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe*, ibid. pp. 169-213.

N. E. STEENROD

- [1] *The topology of fibre bundles*, Princeton, 1951.

COHOMOLOGIE DES VARIÉTÉS ALGÈBRIQUES

PAR ISTVÁN FÁRY

(Received August 1, 1955)

Introduction

I. Provisoirement nous groupons en trois classes les résultats de ce mémoire:

1° Nous décrivons assez complètement la partie additive de la cohomologie des variétés algébriques affines et projectives, qui sont des intersections complètes d'hypersurfaces.

2° Dans un cas particulier, dont l'étude est motivée par 1° ci-dessus et 3° ci-dessous, nous explicitons complètement l'algèbre spectrale du Théorème A de l'Introduction de Fáy [5], qui généralise à une application (presque) arbitraire l'algèbre spectrale bien connue de la théorie des espaces fibrés; nous étudions les invariants de cette algèbre spectrale.

3° Dans l'algèbre spectrale de 2° nous retrouvons sous une forme intrinsèque certains invariants introduits dans Lefschetz [1]; en utilisant cette algèbre spectrale nous trouvons des démonstrations nouvelles de certains théorèmes de Lefschetz [1], [2].

Le véritable sujet de ce travail est 2°; les questions mentionnées en 1°, 3° sont des applications des résultats concernant l'algèbre spectrale de 2°.

II. Les résultats concernant la cohomologie des intersections complètes sont formulés dans le n° 4. La lecture de ce n° ne suppose pas la connaissance du reste du mémoire. Si l'on préfère connaître les énoncés en homologie on peut y remplacer $H^p(V^n)$ soit par $H_{2n-p}(V^n)$, soit par $H_p(W^n, \text{mod } W^{n-1})$, ces derniers étant des groupes d'homologie. Nous ne donnerons pas les énoncés en homologie, vu les remarques du n° 5.

Dernièrement F. Hirzebruch a obtenu des résultats remarquables concernant la cohomologie des intersections complètes. Pour autant que l'on puisse juger d'après les résumés Hirzebruch [1], [2], sa méthode est entièrement différente de la nôtre, et nos résultats se complètent mutuellement. Au moment de la publication de Fáy [2], nous avons eu la plupart des résultats ici démontrés (cf. la fin de Fáy [3]). En effet, ce qui est important dans cette méthode c'est de savoir manier certaines algèbres spectrales; cela étant, la méthode s'applique dans l'étude d'une variété ou d'une hypersurface de la même façon (cf. le n° 17). Toutefois, dans Fáy [2] nous avons formulé les énoncés concernant les hypersurfaces, car nos hypothèses concernant les variétés étaient trop compliquées à ce moment-là.

F. Hirzebruch utilise dans son travail le Théorème 1 du n° 3, dû à S. Lefschetz, que nous prouvons dans ce travail. Une autre démonstration de ce théorème a été annoncée dans Wallace [1]. A. H. Wallace y utilise la théorie des espaces fibrés. On peut remarquer à ce propos que les "singularités" de la fibration en question sont plus importantes que la fibration même (cf. Théorème 5 du n° 4). Nous pensons donc qu'il n'est pas inutile d'utiliser la théorie de Fáy [5] dans cet ordre d'idées.

III. Afin de préciser 2° de I, nous supposons dans la suite que le lecteur connaît I–III de l'Introduction de Fáy [5]; le Théorème A de l.c. sera cité ci-dessous comme "Théorème A". Nous utiliserons les conventions 1–3 de II de l.c.: $H(X) = \sum H^p(X)$ désigne donc l'algèbre de cohomologie à supports compacts de l'espace X , à coefficients dans l'anneau A ; sauf mention expresse du contraire, A est arbitraire; dans certains cas nous envisageons l'anneau des entiers $\mathbb{Z}$, ou un corps A ; $\{E_r\}$ est une algèbre spectrale (le plus souvent elle est l'algèbre spectrale du Théorème A). Nous ajoutons à ces conventions les définitions et notations que voici:

1. Nous désignons par W^n une variété algébrique de dimension complexe n dans l'espace projectif complexe P^t ($1 \leq n \leq t$; si $n = t$, $W^n = P^t$; si $n = t - 1$, W^n est appelé hypersurface). Nous n'envisageons que des points $x \in P^t$ dont les coordonnées appartiennent au corps C des nombres complexes. P^t est donc un espace topologique, W^n est un sous-espace fermé de celui-ci, et, s'il est dépourvu de singularités, la structure de P^t induit une structure de variété analytique complexe sur W^n .

2. L'espace affine complexe C^t est considéré comme un ouvert de P^t : $C^t = P^t - P_\infty^{t-1}$. Une variété affine est toujours notée V^n ; elle est la partie affine $V^n = W^n - W^{n-1}$, $W^{n-1} = W^n \cap P_\infty^{t-1}$ d'une variété W^n . Si nous disons que V^n est dépourvu de singularités, nous entendons par là que W^n et $W^n \cap P_\infty^{t-1}$ sont sans singularités.

3. La définition suivante simplifie beaucoup l'exposé de ce mémoire:

DÉFINITION 1. Soit W^n une variété algébrique de P^t . Nous disons que W^n a un seul point double c , si: 1° $W^n - c$ est une variété au sens topologique; 2° il existe dans P^t un système de coordonnées locales $(z_1, \dots, z_t)$ d'origine c , tel que

$$(1) \quad W^n \cap B: \begin{cases} a(z_1, \dots, z_{n+1}) = 0 \\ |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 \leq \rho \end{cases} \quad z_i = 0, \quad \text{si } i \geq n+2$$

est valable, où a est un polynôme homogène de degré $m \geq 2$, et B est la boule

$$(2) \quad B: |z_1|^2 + \dots + |z_t|^2 \leq \rho$$

centrée à c dans P^t . $c \in V^n$ est le seul point double de la variété affine V^n , si la variété projective W^n ($V^n = W^n \cap C^t$) satisfait aux conditions 1° et 2°.

4. Si a est une forme quadratique non dégénérée dans (1), donc

$$(3) \quad W^n \cap B: \begin{cases} z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0 \\ |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 \leq \rho \end{cases} \quad z_i = 0, \quad \text{si } i \geq n+2$$

est valable, nous disons que W^n a un seul point double quadratique non dégénéré.

IV. Soit V^n une variété affine sans singularités dans C^t , et $F(x_1, \dots, x_t)$ un polynôme à coefficients complexes. Désignons par f la restriction de F à V^n :

$$(4) \quad f: V^n \rightarrow C \quad (fV^n = C)$$

est donc une fonction à valeurs complexes, partout définie, et partout holomorphe

dans V^n , dont la valeur en $(x_1, \dots, x_i) \in V^n$ est $\xi = F(x_1, \dots, x_i)$. Or, $F = \xi$ est l'équation d'une hypersurface de C^t ,

$$(5) \quad V_{\xi}^{n-1} = f^{-1}(\xi)$$

est donc l'intersection de V^n avec cette hypersurface. Dans le n° 7 nous allons prouver: si F est linéaire, et convenablement choisi, il existe un ensemble fini $\Gamma \subset C$ de valeurs de ξ , tel que

$$(6) \quad V_{\xi}^{n-1} \text{ est sans singularités,} \quad \text{si } \xi \notin \Gamma$$

$$(7) \quad V_{\gamma}^{n-1} \text{ a un seul point double } c_{\gamma}, \quad \text{si } \gamma \in \Gamma.$$

Dans ce qui suit nous envisageons plus généralement des f de (4), telles que (6), (7) soient valables.

Au point double c_{γ} de (7) nous attachons le cône tangent

$$(8) \quad CV^{n-1}(\gamma)$$

de V_{γ}^{n-1} en c_{γ} . Vu (1), ce cône est défini par

$$(9) \quad CV^{n-1}(\gamma): a(z_1, \dots, z_n) = 0$$

dans un espace affine C^n (espace tangent de V^n au point c_{γ}); il est déterminé par la condition

$$(10) \quad CV^{n-1}(\gamma) \cap B = V_{\gamma}^{n-1} \cap B$$

où B est la boule de (1).

V. Nous pouvons à présent formuler avec précision 2° de I: *Nous allons étudier l'algèbre spectrale du Théorème A dans le cas, où l'application est f de (4); nous allons trouver dans ce cas des relations entre la cohomologie de V^n , V_{ξ}^{n-1} de (6), et des $CV^{n-1}(\gamma)$ de (8).* En réalité, nous envisageons dans les n°s ultérieurs une fonction plus générale que f de (4), mais dans cette introduction nous pouvons nous contenter d'envisager la fonction définie dans IV.

Les principaux résultats concernant l'algèbre spectrale en question sont formulés dans le n° 2. Le premier théorème n'est qu'une spécialisation du Théorème A au cas où l'application figurant dans ce théorème est (4). L'espace X est dans ce cas V^n , Y est le plan de Cauchy C ; le premier ensemble critique est Γ , et le second est vide. Dans le n° 13 nous calculons le premier terme invariant E_2 de l'algèbre spectrale. L'expression explicite de celui-ci n'est pas donnée dans le Chapitre 1, car elle est "trop grande"; c'est le terme E_3 que nous envisageons dans le Théorème B du n° 2. Son expression (17) du n° 2 s'obtient grâce au Théorème 2 du n° 10 de Fáry [5], qui donne à présent explicitement la différentielle d_2 de E_2 , donc le terme $E_3 = H(E_2)$ de l'algèbre spectrale. Ce terme fait intervenir des invariants dits *modules critiques* de $\gamma \in \Gamma$.

Ces modules critiques sont des cas particuliers des notions, qui auraient dû être introduites et étudiées dans le cadre de la théorie générale des applications de type d'homologie simple. Nous n'avons pas introduit ces notions générales,

car cela demande un assez long développement. Nous devons donc nous contenter de motiver l'introduction de la notion particulière, qui nous sera utile dans la suite.

Le plan C étant localement contractile, le Critère 2 du n° 8 de Fáry [5] s'applique: $\xi \in C$ est une valeur non critique de f , s'il existe un disque fermé D centré à ξ , tel que la section

$$(11) \quad H(f^{-1}D) \rightarrow H(f^{-1}\xi)$$

soit un isomorphisme pour tout $\xi \in D$, et dans ce cas seulement. Nous avons déjà dit que c'est le cas, si $\xi \notin \Gamma$.

Si γ est une valeur critique, on peut toujours trouver un disque fermé D centré à γ , tel que (11) soit un isomorphisme pour $\xi = \gamma$. Pour les autres $\xi \in D$ (11) ne peut plus être un isomorphisme, puisque γ est critique. Il aura donc un noyau $N(\gamma)$, et un conoyau $Q(\gamma)$; il se trouve que ces modules sont indépendants de ξ (le second à un automorphisme près). Ces données sont des invariants de γ , et méritent le nom de module critique, puisqu'ils mesurent la "déviation de γ d'une valeur non critique".

Nous montrerons que ces valeurs critiques γ sont précisément les éléments de Γ de IV. Nous constatons dans le Chapitre 3 que $N(\gamma)$, $Q(\gamma)$ peuvent être estimés en fonction de la cohomologie des cônes (8), qui sont déterminés par les restrictions de f aux voisinages des points doubles c_γ des V_γ^{n-1} . Nous trouvons donc une situation analogue à celle signalée dans Fáry [3].

Dans le terme E_3 de l'algèbre spectrale de f , nous avons deux termes provenant de la somme directe des modules critiques de f ; ce sont N et Q_0 de (17) du n° 2.

En dehors des modules critiques, E_3 fait intervenir $H(V^{n-1})$, où $V^{n-1} = V_\xi^{n-1}$ pour un $\xi \notin \Gamma$, et un sous-module dit de Lefschetz et noté L de celui-ci (dans les formules du n° 2 V^n est noté X , et $V^{n-1} = F$). L est en relation étroite avec les *cycles évanouissants* de Lefschetz ([1] p. 23, 93). Les relations entre ces notions sont explicitées dans le n° 3.

De ce qui précède est évident que nous avons une forme explicite de E_3 , si nous connaissons la cohomologie des cônes (8), et si cette cohomologie est simple. C'est le cas, si les points doubles des V_γ^{n-1} sont quadratiques (v. (3)), car nous connaissons bien la cohomologie des quadriques (n° 6); S. Lefschetz envisage uniquement ce cas qui est, en effet, le plus important. Nous trouvons dans ce cas l'équation $\chi(V^n) = (-1)^n \mu + \chi(V^{n-1})$ entre les caractéristiques d'Euler-Poincaré et le nombre μ des points critiques (d'une façon plus précise on a (39), (40) du n° 2). Cette relation permet d'évaluer les nombres de Betti des intersections complètes d'hypersurfaces V^n , W^n (nos 4, 17). La cohomologie de ces dernières est banale pour les degrés $\neq n$; toutes les classes de cohomologie non algébriques de W^n proviennent d'une classe de $V^n = W^n \cap C^t$. Nous généralisons ainsi la décomposition de Petrowski ([1] p. 340 (97)) aux variétés W^n (cf. Leray [3], p. 97, n° 51).

VI. Picard (v., par exemple, Picard et Simart, Théorie des fonctions algébriques de deux variables indépendantes, Gautier-Villars, 1897) et Poincaré (Oeuvres,

Tome VI, p. 393, 397) ont déjà étudié les principaux problèmes de Topologie algébrique concernant les séries linéaires $\{V_\xi^1\}$ de courbes tracées sur une surface V^2 , mais la théorie générale fut inaugurée dans les mémorables travaux de S. Lefschetz; la multiplication, en particulier le coefficient (h, l_γ) de la formule (27) du n° 6, y joue un rôle important.

Lefschetz [1] envisage une série linéaire $\{W_\xi^{n-1}\}$ sur un W^n . La partie de sa théorie, qui nous concerne, contient deux points essentiels: 1° relations entre $H(W^n)$ et $H(W_\xi^{n-1})$ (exemple: les cycles de dimensions $< n$ de W^n peuvent être déformés en cycles de W_ξ^{n-1}); 2° classification des éléments de $H(W_\xi^{n-1})$ selon leur dépendance de ξ (cycles algébriques, finis etc.).

Pour autant que je sache, cette théorie n'a pas été mise à jour, bien qu'on l'ait utilisée en théorie de l'intégration, par exemple. Notre but ne peut être de redévelopper la théorie de S. Lefschetz, car cela demanderait un livre plutôt qu'un mémoire, mais nous devons étudier les invariants introduits par cet auteur, puisqu'ils se présentent sous une forme intrinsèque dans l'algèbre spectrale dont nous avons parlée dans V. (A vrai dire, nous étudions, du point de vue de la méthode, la géométrie affine, alors que la théorie de Lefschetz [1] concerne les variétés projectives. En terminologie moderne on pourrait dire que l.c. amorce la théorie de "l'algèbre spectrale d'une série linéaire", et non pas celle d'une application. Nous revenons à cette question dans un autre travail; à présent nous faisons abstraction de cette différence des méthodes.)

Le présent développement ne pouvait donc que confirmer certains résultats de ce profond travail de S. Lefschetz, à un détail près qu'il convient de signaler: le module $N(\gamma)$ ne figure pas l.c. (v. à ce sujet la note 4 du n° 3).

VII. Le présent travail est la seconde partie d'une Thèse, dont la première partie est Fáy [5]. Dans cette seconde partie l'influence de M. Jean Leray était très importante (cf. la fin de Fáy [2]). Je le remercie de m'avoir confié la publication de sa démonstration du Théorème 1 du n° 6.

TABLE DES MATIÈRES

CHAPITRE 1. ÉNONCÉ DES RÉSULTATS

1. Une classe de fonctions holomorphes.....	26
2. Le théorème principal.....	28
3. Classes de cohomologie finies, algébriques, et de Lefschetz.....	33
4. Cohomologie des intersections complètes affines et projectives.....	38

CHAPITRE 2. PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

5. Homologie et cohomologie des variétés orientées.....	42
6. Cohomologie des quadriques complexes.....	47
7. Constructions géométriques.....	53

CHAPITRE 3. MODULES CRITIQUES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DU N° 1

8. Définition des modules critiques.....	56
9. Relations entre les modules critiques de γ et ceux du point critique $c \in F_\gamma$	58
10. Preuve des lemmes du n° 9.....	59
11. Module de Lefschetz $L \subset H(F)$	61

CHAPITRE 4. ALGÈBRE SPECTRALE DE LA FONCTION f DU N° 1

12. Preuve du Théorème 1 du n° 2.....	63
13. Autre forme de E_2 ; la différentielle d_2	64
14. Preuve du Théorème B du n° 2.....	67
15. Calcul de la caractéristique de $\{E_r\}$	67
16. Preuve des compléments du Théorème B du n° 2.....	68
17. Preuve des énoncés du n° 4.....	70

CHAPITRE 1. ENONCÉ DES RÉSULTATS

1. Une classe de fonctions holomorphes

Du point de vue de la Topologie algébrique la théorie de Lefschetz [1] concerne, grosso modo, des "fibrations à fibres singulières". On envisage donc une variété X , et une application $f: X \rightarrow C$, telles que X est fibré par les variétés $f^{-1}(\xi)$ dans le complémentaire d'un nombre fini de $f^{-1}(\gamma)$; les "fibres exceptionnelles" $f^{-1}(\gamma)$ sont des variétés à un point double près (cf. (6), (7) de l'Introduction). Si nous voulions expliciter ces conditions du point de vue de la théorie des espaces fibrés, les hypothèses seraient artificielles, et compliquées. En outre, vu les résultats de Fáry [5], en théorie de cohomologie il n'y a pas d'intérêt de s'occuper des "fibrations à singularités", à moins qu'on ne veuille pas appeler tout complexe simplicial "espace fibré à singularités". Nous verrons qu'il est préférable de parler d'une variété analytique complexe X , et d'une fonction holomorphe f définie dans X . Nous faisons ainsi des hypothèses plus strictes qu'il ne serait nécessaire dans les raisonnements topologiques, mais nos hypothèses faciliteront les applications en vue. Dans ce qui suit nous expliciterons donc nos conditions en termes de fonctions holomorphes.

1. Si F est un fermé d'un espace topologique X , nous disons que U_∞ est un voisinage de l'infini de F dans X , s'il existe un compact E de F , tel que U_∞ soit un voisinage de $F - E$ dans X .

Soit X une variété analytique complexe, et f une fonction définie et holomorphe au point $c \in X$. Nous disons que c est un *point d-critique* de f , si toutes les dérivées premières de f s'annulent en c ; $\gamma = f(c)$ est dit *valeur d-critique* de f .

Les notations suivantes seront conservées dans la suite:

(1) X est une variété analytique complexe de dimension complexe n .

(2) C est le plan de Cauchy de la variable complexe ξ ,

(3) $f: X \rightarrow C$ ($f(X) = C$)

est une fonction à valeurs complexes, partout définie et holomorphe dans X , qui l'applique SUR C .

(4) $F_\xi = f^{-1}(\xi)$.

HYPOTHÈSE 1. La fonction f possède un nombre fini de points d-critiques $c_1, \dots, c_\mu$; nous supposons que $f(c_i) \neq f(c_j)$, $1 \leq i < j \leq \mu$, et nous utilisons les notations $\gamma_i = f(c_i)$, $\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_\mu\}$.

HYPOTHÈSE 2. *Tout F_ξ possède un voisinage de l'infini U_∞ dans X , tel que U_∞ soit le produit $D \times (F_\xi \cap U_\infty)$, où $D \subset C$, et que $f|U_\infty$ soit la première projection de ce produit.*

Nous allons prouver plus tard que les c_i sont les points critiques, et les γ_i les valeurs critiques de f . Notre première condition précise donc la nature des points critiques de f . La seconde hypothèse exclue l'existence des "points critiques à l'infini".

2. Dans ce qui suit nous formulons quelques corollaires de nos hypothèses; ils seront prouvés dans le n° 7. Dans la suite un point d -critique (une valeur d -critique) sera souvent noté c (γ); selon l'Hypothèse 1 tout F_γ contient un c bien déterminé. Posons

$$(5) \quad F_\Gamma = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} F_\gamma$$

et formulons la

PROPOSITION 1. *$X - F_\Gamma$ est un espace fibré, $C - \Gamma$ est sa base, et $f|(X - F_\Gamma)$ est la projection de l'espace fibré sur sa base.*

Dans cet énoncé "espace fibré" est entendu au sens de Steenrod ([1], 1.1 provisional definition, p. 3); cette définition est équivalente à celle de Leray ([2], p. 172), dans le cas où la base est localement connexe. Nous n'envisageons donc ni le groupe structural, ni les fonctions de coordonnées, car ces notions n'ont pas d'utilité dans la suite. Par contre l'opération de $\pi_1(C - \Gamma, \xi)$ dans $H(F_\xi)$ sera important.

Développons f en série de Taylor dans un système de coordonnées locales (x_i) de X , dont l'origine est le point d -critique c :

$$(6) \quad f(x_1, \dots, x_n) = \gamma + a(x_1, \dots, x_n) + b(x_1, \dots, x_n) \quad (\gamma = f(c)),$$

où a est un polynôme homogène de degré $m \geq 2$, et b est le reste du développement limité (il ne contient que des termes de degré $\geq m + 1$). Si a est une forme quadratique (non dégénérée) nous disons que c est un *point d -critique (non-dégénéré)*.

PROPOSITION 2. *Soit c un point d -critique de f , et (6) le développement limité de f au voisinage de c . Il existe un système de coordonnées locales (z_i) d'origine c dans X , tel que*

$$(7) \quad f(z_1, \dots, z_n) = \gamma + a(z_1, \dots, z_n) \quad (\gamma = f(c))$$

soit valable, où a est le polynôme homogène de degré $m \geq 2$, qui figure dans (6). Pour que c soit quadratique non dégénéré il faut et il suffit que

$$(8) \quad f(z_1, \dots, z_n) = \gamma + z_1^2 + \dots + z_n^2 \quad (\gamma = f(c))$$

soit valable, si les z_i sont convenablement choisis.

Je n'ai pas pu trouver cette proposition dans la littérature. Sa preuve est délicate, mais ne fait intervenir que des raisonnements usuels dans la théorie des valeurs critiques des fonctions différentiables (cf., par exemple, Seifert et Threlfall [1], §9, p. 36), nous ne la donnerons donc pas.

PROPOSITION 3. Soit c un point d -critique de f . Choisissons un système de coordonnées locales (z_i) de X d'origine c , tel que (7) soit valable. Désignons par B la boule

$$(9) \quad B: |z_1|^2 + \dots + |z_n|^2 \leq \rho \quad (\rho > 0; B: \text{COMPACT})$$

de X centré à c , où $\rho > 0$ est assez petit pour que tout système de nombres complexes z_i satisfaisant à (9) représente un point de X . Soit D un disque fermé dans C centré à γ , et posons

$$(10) \quad U = f^{-1}(D) \quad (U: \text{voisinage FERMÉ de } F_\gamma).$$

Si D est suffisamment petit, $U - B$ est le produit $D \times (F_\gamma - B)$, et $f|U$ est la première projection de ce produit.

Pour prouver cette proposition nous utiliserons le voisinage U_∞ de l'infini de F_γ postulé dans l'Hypothèse 2, et un voisinage "tubulaire" de $F_\gamma - (B \cup U_\infty)$ dans X (cf. n° 7). Cela posé, nous obtenons facilement le résultat suivant:

PROPOSITION 4. Pour tout $\zeta \in C$ on peut trouver un disque D dans C centré à ζ , et tel que U de (10) soit rétractile par déformation sur F_ζ .

Selon la Proposition 1 on peut construire un recouvrement localement fini $\rho' = \{D\}$ de $C - \Gamma$ par des disques fermés D , tels que (10) soit un produit $D \times F_\zeta$, $\zeta \in D$, pour tout $D \in \rho'$. Cela posé, attachons à tout $\gamma \in \Gamma$ un disque D_γ selon la Proposition 4. Notons ρ le recouvrement de C que constituent les D_γ et les éléments de ρ' . Nous trouvons ainsi le recouvrement du plan que mentionne la note 4 du n° 4 de Fáy [5]; son existence prouve que le faisceau image de f est de type fini, si $H(F_\xi)$ est engendré par un nombre fini de classes de cohomologie.

3. La proposition suivante montre que les résultats concernant les fonctions (3) satisfaisantes aux Hypothèses 1, 2 sont utiles en géométrie algébrique:

PROPOSITION 5. Soit V^n une variété algébrique affine de C^t dépourvue de singularités (au sens de III.2 de l'Introduction). Il existe une fonction (3) définie dans $X = V^n$, satisfaisante aux Hypothèses 1, 2, et telle que $V_\xi^{n-1} = f^{-1}(\xi)$ soit une section hyperplane de V^n pour tout $\xi \in C$.

Autrement dit: si nous coupons V^n par des hyperplans parallèles de C^t , et nous définissons f comme dans (4) de l'Introduction, nous obtenons une fonction satisfaisante aux Hypothèses 1, 2, qui aura donc les propriétés décrites dans les Propositions 1-4, pourvu que la série d'hyperplans soit convenablement choisie.

2. Le théorème principal

Les énoncés de ce n° concernent l'algèbre spectrale du Théorème A de l'Introduction de Fáy [5] dans le cas, où $f: X \rightarrow C$ est une fonction partout définie et partout holomorphe dans la variété analytique complexe X , qui satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° 1 ($fX = C$). Selon la théorie générale les termes E_r , $r \geq 2$, de cette algèbre spectrale, munis des degrés et des différentielles, sont des invariants topologiques de f . Nous explicitons à présent ces invariants, et nous les interprétons. Nous trouvons ainsi sous une forme intrinsèque des généralisations de certains invariants introduits dans Lefschetz [1]; cela montre l'intérêt d'envisager

les invariants de l'algèbre spectrale. Nous appliquons les présents résultats dans le n° 4 en géométrie algébrique.

Le premier théorème s'obtient par spécialisation à partir du Théorème A ci-dessus cité:

THÉORÈME 1. *Soit $f: X \rightarrow C$ une fonction partout définie et partout holomorphe dans la variété analytique complexe X (de dimension complexe n). Supposons que $fX = C$, et que f satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° 1. La fonction f détermine les données suivantes, qui sont des invariants topologiques de f :*

1° *L'ensemble Γ de l'Hypothèse 1 du n° 1; c'est l'ensemble des valeurs critiques de f .*

2° *Un faisceau localement constant $\mathfrak{F}_0$ dans $C - \Gamma$; $\mathfrak{F}_0 = \sum_{t \geq 0} \mathfrak{F}_0^t$, $\mathfrak{F}_0^t(\xi) = H^t(F_\xi)(\xi \notin \Gamma)$.*

3° *Une filtration de $H(X)$, telle que*

$$(1) \quad H(X)_{-1} \supset H(X)_0 = H(X)_1 \supset H(X)_2$$

$$(2) \quad H(X)_i = H(X), \quad \text{si } i \leq -1, \quad H(X)_i = 0, \quad \text{si } i \geq 3.$$

4° *Une algèbre spectrale $\{E_2, E_3, E_4\}$, telle que*

$$(3) \quad E_2 = \sum_{\gamma \in \Gamma} H(F_\gamma) + H^1(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0) + H^2(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0)$$

$$(4) \quad E_4 = \sum_{i=-1}^2 H(X)_i / H(X)_{i+1}.$$

Les degrés de E_2 sont les suivants:

$$(5) \quad H^p(F_\gamma) \begin{cases} d^\circ \text{ canonique } p \\ d^\circ \text{ filtrant } -1 \end{cases}$$

$$(6) \quad H^p(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0^t) \begin{cases} d^\circ \text{ canonique } p + t \\ d^\circ \text{ filtrant } p \end{cases} \quad p = 1, 2.$$

Les différentielles d_2, d_3 suivent les règles de degrés usuels (Fáry [5], n° 7, B); d_r est identiquement nulle pour $r \geq 4$. Si $h_1, h_2 \in H(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0)$, $h_1 h_2 \in H(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0)$ est le produit dans cette algèbre de cohomologie; si $h \in H(C - \Gamma, \mathfrak{F})$, $k_i \in H(F_\gamma)$, $h k_i = k_i h = k_1 k_2 = 0$ dans l'algèbre spectrale.

L'étude du faisceau image $\mathfrak{F}$ de f , le calcul de $H(C - \Gamma, \mathfrak{F}_0)$, et le Théorème 2 du n° 10 de Fáry [5] permet d'expliciter toute l'algèbre spectrale (3), (4). Le principal résultat concerne le terme E_3 , qui fait intervenir certains invariants que nous allons définir à présent.

Nous montrons dans le n° 8 qu'à tout $\gamma \in \Gamma$ on peut faire correspondre un homomorphisme bien déterminé

$$(7) \quad \begin{aligned} \sigma_\gamma: H(F_\gamma) &\rightarrow H(F_\xi) \quad (\gamma \in \Gamma, \xi \text{ près de } \gamma, \xi \neq \gamma) \\ \text{noyau } N(\gamma) &\text{ conoyau } Q_\xi(\gamma). \end{aligned}$$

On envisage le voisinage fermé U de F_γ , qui figure dans la Proposition 4 du n° 1 (ce voisinage est rétractile par déformation sur F_γ): σ_γ est la composé de l'iso-

morphisme $H(F_\gamma) \approx H(U)$, et de la section $H(U) \rightarrow H(F_\xi)$. Les noyaux et les conoyaux de ces homomorphismes figurent dans le terme E_3 de l'algèbre spectrale. Dans le n° 9 nous montrons que ces invariants peuvent être estimés en fonction de la cohomologie des variétés

$$(8) \quad CV(\gamma): a(z_1, \dots, z_n) = 0$$

$$(9) \quad V_\xi(\gamma): a(z_1, \dots, z_n) = \xi \quad (\xi \neq 0)$$

où a est le polynôme homogène, qui figure dans (6) du n° 1.

Selon le Théorème 1, $H(F_\xi) = \mathfrak{F}_0(\xi)$ est l'algèbre d'un faisceau localement constant dans $C - \Gamma$. Le groupe fondamental $\pi_1(C - \Gamma, \xi)$ est donc un groupe d'opérateurs de $H(F_\xi)$. Nous pouvons donc envisager les sous-modules L' de $H(F_\xi)$ ayant les propriétés suivantes:

$$(10) \quad \theta L' = L' \quad \theta \in \pi_1(C - \Gamma, \xi), \quad l \in H(F_\xi).$$

$$(11) \quad \theta l \equiv l \pmod{L'}$$

Le plus petit sous-module L_ξ de $H(F_\xi)$ satisfaisant à (10), (11) sera dit module de Lefschetz de f (cf. le n° 11). Vu la définition, les quotients $H(F_\xi)/L_\xi$ sont canoniquement isomorphes, nous pouvons donc les noter

$$(12) \quad H(F)/L.$$

Cela posé, nous avons le principal théorème de ce n°:

THÉORÈME B. Désignons par E_3 le troisième terme de l'algèbre spectrale (3), (4). E_2, d_2, κ_3^2 (cf. Fáy [5], n° 7, A-D) définissent les invariants suivants de f :

1° A toute valeur critique $\gamma \in \Gamma$ est attaché un premier module critique $N(\gamma)$, noyau de (7); nous posons:

$$(13) \quad N = \sum_{\gamma \in \Gamma} N(\gamma)$$

(somme directe). La différentielle d_3 détermine un sous-module

$$(14) \quad N_0 \subset N$$

qui sera défini dans le n° 14.

2° A toute valeur critique est attaché un second module critique $Q(\gamma)$, conoyau de (7); nous posons:

$$(15) \quad Q = \sum_{\gamma \in \Gamma} Q(\gamma)$$

(somme directe). La différentielle d_2 détermine un sous-module

$$(16) \quad Q_0 \subset Q$$

qui sera défini dans le n° 14.

3° Le sous-module de Lefschetz $L \approx L_\xi$, $L_\xi \subset H(F_\xi)$ est le plus petit module satisfaisant à (10), (11); nous utilisons la notation $H(F)/L$ de (12).

Le terme E_3 de l'algèbre spectrale (3), (4) de f est alors de la forme suivante:

$$(17) \quad E_3 \left\{ \begin{array}{l} E_3 = N + Q_0 + H(F)/L \\ d^\circ \text{ filtrant } -1, \quad 1, \quad 2 \\ \text{le module des éléments de } d^\circ \text{ canonique } l \text{ est} \\ E_3(l) = N^l + Q_0^{l-1} + H^{l-2}(F)/L^{l-2} \\ d_3 \text{ est nulle sur les éléments de } d^\circ \text{ filtrant } \geq 1: \\ d_3: N \rightarrow H(F)/L. \end{array} \right.$$

$$(18) \quad GH(X) \left\{ \begin{array}{l} GH(X) = E_4 = N_0 + Q_0 + (H(F)/L)/d_3N \\ GH^l(X) = E_4(l) = N_0^l + Q_0^{l-1} + (H^{l-2}(F)/L^{l-2})/d_3N^{l-1}. \end{array} \right.$$

Dans les énoncés ci-dessous nous complétons le théorème précédent:

COMPLÉMENT 1. Si $0 \leq p \leq n-1$, $N^p(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

COMPLÉMENT 2. Si $0 \leq p \leq n-2$, $Q^p(\gamma) = 0$ pour tout $\gamma \in \Gamma$.

COMPLÉMENT 3. Les alternatives suivantes sont valables:

$$(19) \quad \text{si } N(\gamma) = 0, \quad Q(\gamma) \text{ est en dualité avec } H(V_\gamma(\gamma)) \text{ de (9)}$$

$$(20) \quad \text{si } Q(\gamma) = 0, \quad N(\gamma) \approx H(CV(\gamma)) \text{ (cf. (8)).}$$

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ on a:

$$(21) \quad N(\gamma) + Q(\gamma) \neq 0,$$

ce qui revient à dire que γ est une valeur critique de f .

COMPLÉMENT 4. Formons la somme directe

$$(22) \quad \sum_{\gamma \in \Gamma} H(V_\gamma(\gamma)) \quad (\zeta \neq 0).$$

Le module de Lefschetz L est un quotient de cette somme; on a

$$(23) \quad L^p = 0, \quad \text{si } 0 \leq p \leq n-2.$$

Notons que les Compléments 1, 2 sont équivalents à un théorème de Lefschetz (Théorème 2 du n° 3; cf. n° 16); dans un cas particulier L est engendré par les classes de cohomologie des *cycles évanouissants* de Lefschetz [1].

Dans les applications de ces résultats en géométrie algébrique nous pouvons parfois choisir une fonction f sur un X donné. Or, ces invariants se simplifient beaucoup, si tous les points critiques sont quadratiques non dégénérés. (N.B.: Vu le Complément 3, (21), nous pouvons dire valeur critique au lieu de valeur "d-critique".) Il y a donc intérêt de formuler ces résultats dans ce cas particulier:

THÉORÈME 3. Supposons que tous les points d-critiques de f sont quadratiques

non dégénérés. Dans ces conditions:

$$(24) \quad N^p(\gamma) = 0, \quad \text{si } p \neq n$$

$$(25) \quad Q^p(\gamma) = 0, \quad \text{si } p \neq n - 1.$$

Si l'anneau des coefficients est l'anneau des entiers Z , l'alternative (19), (20) peut être remplacée par la disjonction complète que voici:

$$(26) \quad \text{ou bien } Q^{n-1}(\gamma) = Z, \quad \text{et } N^n(\gamma) = Z/m_\gamma Z, \quad \text{où } m_\gamma \geq 1$$

$$(27) \quad \text{ou bien } Q^{n-1}(\gamma) = 0, \quad \text{et } N^n(\gamma) = Z;$$

si (27) a lieu n doit être PAIR. Si l'anneau des coefficients est un corps A nous avons

$$(28) \quad \text{ou bien } Q^{n-1}(\gamma) = A, \quad \text{et } N^n(\gamma) = 0 \quad (A \text{ est un corps});$$

$$(29) \quad \text{ou bien } Q^{n-1}(\gamma) = 0, \quad \text{et } N^n(\gamma) = A$$

en tous les cas

$$(30) \quad N^n(\gamma) + Q^{n-1}(\gamma) \approx A \quad (A \text{ est un corps}).$$

Si la dimension n de X est IMPAIRE, et la caractéristique de A est $\neq 2$, alors

$$(31) \quad N(\gamma) = 0, \quad \text{et } Q(\gamma) = A \text{ pour tout } \gamma \quad (n \text{ est impair, } A = \text{corps}).$$

Pour le module de Lefschetz L nous aurons

$$(32) \quad L^p = 0, \quad \text{si } p \neq n - 1$$

$$(33) \quad \text{Rang de } L \leq \mu \quad (A \text{ quelconque})$$

où μ est le nombre des valeurs critiques de f .

COROLLAIRE 1. Si tous les points d -critiques de l'application f sont quadratiques non dégénérés, les invariants de son algèbre spectrale sont les suivants:

$$(36) \quad E_3 \begin{cases} E_3(l) = H^{l-2}(F), & \text{si } l \neq n, n+1 \\ E_3(n) = N + Q_0 + H^{n-2}(F) \\ E_3(n+1) = H^{n-1}(F)/L \\ d_3: N \rightarrow H^{n-1}(F)/L \end{cases} \quad (L = L^{n-1})$$

$$(37) \quad GH \begin{cases} GH^l(X) = H^l(X) = H^{l-2}(F), & \text{si } l \neq n, n+1 \\ GH^n(X) = N_0 + Q_0 + H^{n-2}(F) \\ GH^{n+1}(X) = H^{n+1}(X) = (H^{n-1}(F)/L)/d_3N \end{cases} \quad (L = L^{n-1}).$$

Si A est un corps, et ΔH désigne la dimension de l'espace vectoriel H sur A , nous avons

$$(38) \quad \begin{aligned} \Delta N + \Delta Q &= \mu, \text{ et} \\ \Delta N + \Delta Q_0 + \Delta L &= \mu \end{aligned} \quad (\mu: \text{nombre des points de } \Gamma).$$

Si n est impair (31) montre que ces invariants se simplifient davantage.

COROLLAIRE 2. *Supposons que f n'a que des points d-critiques quadratiques non dégénérés; soit A un corps. Nous avons alors:*

$$(39) \quad \Delta H^l(X) = \Delta H^{l-2}(F), \quad \text{si } l \neq n, n+1$$

$$(40) \quad \Delta H^{n+1}(X) - \Delta H^n(X) + \mu = \Delta H^{n-1}(F) - \Delta H^{n-2}(F)$$

pour les nombres de Betti (ΔH désigne la dimension de l'espace vectoriel H sur A), où μ est le nombre des points d-critiques de f .

3. Classes de cohomologie finies, algébriques et de Lefschetz

Les deux premières notions sont définies pour toute variété algébrique W^n de l'espace projectif P^t ; les classes dites de Lefschetz sont définies pour certaines sous-variétés sans singularités W^n d'un W^{n+1} . Ces notions interviennent dans l'application des résultats du n° précédent dans l'étude de la cohomologie des variétés algébriques, il convient donc de les définir d'avance.

1. La notion de *classe de cohomologie finie* d'une hypersurface W^n de P^{n+1} a été introduite dans Petrowsky [1], mais, pour autant que je sache, cet auteur n'a pas remarqué l'invariance de cette notion. Nous définissons les classes finies pour les variétés sans singularités $W^n \subset P^t$; l'invariance de la notion découle de la

PROPOSITION 1. *Soit W^n une variété algébrique irréductible et sans singularités dans P^t . Soient V_α^n "des parties affines de W^n ": $V_\alpha^n = W^n - (W^n \cap P_{\alpha}^{t-1})$, où P_{α}^{t-1} n'est pas tangent à W^n . V^n est un ouvert de W^n , on peut donc définir les injections $i_\alpha: H(V_\alpha^n) \rightarrow H(W^n)$. Les images de ces injections sont indépendantes de V_α^n , donc*

$$(1) \quad i_1 H(V_1^n) = i_2 H(V_2^n).$$

Cela dit, nous pouvons poser la

DÉFINITION 1. *Soit W^n une variété irréductible et sans singularités dans P^t . Notons V^n la partie affine de W^n , et soit $i: H(V^n) \rightarrow H(W^n)$ l'injection. Nous posons:*

$$(2) \quad H_F(W^n) = iH(V^n) \quad (H_F^p(W^n) = iH^p(V^n)),$$

ce qui est légitime, vu (1). Les éléments de $H_F(W^n)$ sont appelés *classes de cohomologie finies de W^n* ; une telle classe contient un cocycle, dont le support est dans la partie finie V^n de W^n .

L'importance de cette définition vient du fait que les classes finies figurent (implicitement) dans un théorème de Lefschetz ([1], p. 89, Théorème II). Selon le théorème cité tout cycle de dimension $< n$ de W^n est homologue à un cycle de $W^{n-1} \subset W^n$. Par dualité (Lefschetz [3], p. 203, (30.2), (c)) on en conclut que les cocycles à supports compacts de degré $\leq n-1$ de $W^n - W^{n-1}$ y sont cohomologues nul. Selon la définition précédente on a donc

THÉORÈME 1 (de S. Lefschetz). *Soit W^n une variété algébrique sans singularités*

dans P^t . On a

$$(3) \quad H_F^p(W^n) = 0, \quad \text{si } 0 \leq p \leq n-1,$$

quel que soit l'anneau des coefficients.

Nous prouvons ce théorème en démontrant le résultat équivalent que voici:

THÉORÈME 2 (de S. Lefschetz). Soit V^n une variété affine de C^t n'ayant pas de singularités (au sens de III. 2 de l'Introduction). Dans ces conditions

$$(4) \quad H^p(V^n) = 0, \quad \text{si } 0 \leq p \leq n-1,$$

quel que soit l'anneau des coefficients.

Les classes finies de degré n figurent en outre dans la généralisation (20) du n° 4 d'un résultat de I. Petrowsky.

2. En théorie d'homologie il est naturel d'envisager les cycles de W^n , qui s'obtiennent par une subdivision simpliciale d'un W^k de W^n ($0 \leq k \leq n$); ces cycles sont appelés diviseurs de W^n . Nous utiliserons seulement les diviseurs de W^n qui sont des *intersections complètes* de W^n et d'une sous-variété de P^t . Si W^n est sans singularités, la classe de cohomologie d'un tel diviseur (cf. Corollaire 4 du n° 5) sera appelée *classe algébrique*; ces classes algébriques sont ci-dessous définies pour un W^n quelconque. Comme la preuve de l'existence d'une subdivision simpliciale d'un W^k quelconque est compliquée (cf. van der Waerden [2], pp. 123-135, Lefschetz-Whitehead [1]), nous montrons au n° 5 que, si W^k est une intersection complète, il est la limite des supports des cocycles d'une même classe de cohomologie.

DÉFINITION 2. Soit W^n une variété algébrique quelconque dans l'espace projectif complexe P^t . Notons $W^n: H(P^t) \rightarrow H(W^n)$ la section, et posons

$$(5) \quad H_A(W^n) = W^n H(P^t).$$

Les éléments du premier membre de (5) sont appelés *classes de cohomologie algébriques* de W^n . $H_A^p(W^n)$ désigne les éléments de degré p de (5).

Selon nos conventions l'anneau des coefficients A figure implicitement dans cette définition; l'exemple suivant montre que son rôle est important. Soit W^1 une courbe de degré m dans P^2 . Étant donné une droite P^1 du plan P^2 il existe un cocycle c (d'une couverture fine quelconque de P^2), dont le support est dans un voisinage donné de P^1 , et dont la classe de cohomologie est le générateur positif de $H^2(P^2)$ (cf. le n° 5.3). La classe de cohomologie dans $H^2(W^1)$ de la section $W^1 c$ est alors le générateur positif de $H_A^2(W^1)$. Si l'anneau des coefficients est l'anneau des entiers Z , alors $H_A^2(W^1)$ est m fois $H^2(W^1)$, car P^1 peut être choisi en position générale par rapport à W^1 , de sorte qu'elle la coupe en m points simples. Si A est un corps de caractéristique 0, il s'en suit que $H_A^2(W^1) = H^2(W^1)$; si A est de caractéristique p , p étant un diviseur de m , alors $H_A^2(W^1) = 0$. Dans le cas général ce raisonnement donne la

PROPOSITION 2. Soit W^n , $n \geq 1$, une variété algébrique quelconque de P^t , et notons m le nombre maximal des points de l'intersection ensembliste $W^n \cap P^{t-n}$,

où $W^n \not\subset P^{t-n}$, et $P^{t-n} \not\subset W^n$. Si Z (anneau des entiers) est l'anneau des coefficients, on a $H_A^{2n}(W^n) = mH^{2n}(W^n)$.¹

Cette proposition justifie la définition suivante, où W^n peut être quelconque (même décomposable):

DÉFINITION 3. Soit W^n , $n \geq 1$, une variété algébrique quelconque de P^t ; utilisons Z comme anneau de coefficients de la cohomologie. L'entier m , tel que $H_A^{2n}(W^n) = mH^{2n}(W^n)$ soit valable, est appelé degré de W^n .

La structure algébrique de $H_A(W^n)$ est décrite dans la

PROPOSITION 3. $H_A(W^n)$ est une algèbre de polynômes ayant un générateur $e \in H_A^2(W^n)$, tel que $e^{n+1} = 0$ ($n \geq 1$). Étant donné un $P^{t-1} \subset P^t$, et un voisinage arbitraire U de $P^{t-1} \cap W^n$ dans W^n , il existe un cocycle $c \in e$ (élément d'une couverture fine arbitraire de W^n), dont le support est dans U .

3. Nous parlerons très brièvement et incomplètement sur les cycles évanouissants au sens de S. Lefschetz ([1], p. 23, Théorème fondamental (pour $n = 1$); p. 93, Théorèmes sur les Γ_{d-1} de C_u , I (pour $n \geq 2$); [2], p. 15, XV).

Pour autant que je vois une définition explicite et complète des cycles évanouissants devrait faire intervenir un faisceau, et les propriétés structurales algébriques de ce faisceau. Toutefois, puisqu'une telle définition rentre dans le cadre de la théorie de structure algébrique des faisceaux (sujet que nous avons mentionné dans l'Introduction V de Fáy [5]), nous ne pouvons pas la donner à présent. Les Définitions 4-6 ci-dessous ne sont donc pas définitives.

Ces définitions sont basées sur le

THÉORÈME 3. Soit Q^n la quadrique complexe de l'espace affine complexe C^{n+1} définie par

$$(6) \quad Q^n: z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1, \quad z_i \text{ complexe} \quad (n \geq 1).$$

Sa partie réelle

$$(7) \quad S^n: z_1^2 + \cdots + z_{n+1}^2 = 1, \quad z_i \text{ réel} \quad (S^n \subset Q^n)$$

est une sphère de dimension n de l'espace euclidien $R^{n+1} \subset C^{n+1}$. S^n est un cycle de Q^n ; sa classe de COHOMOLOGIE sera notée l , et appelée classe de Lefschetz de Q^n . Nous avons:

$$(8) \quad H^p(Q^n) = 0, \quad \text{si } p \neq n, 2n$$

$$(9) \quad l \text{ est le générateur de } H^n(Q^n) \approx A,$$

où l'anneau des coefficients est quelconque; bien entendu, $H^{2n}(Q^n) \approx A$. Si (l, l) désigne l'indice de Kronecker

$$(10) \quad (l, l) = \begin{cases} 2, & \text{si } n \text{ est pair} \\ 0, & \text{si } n \text{ est impair,} \end{cases}$$

¹ Si H est un groupe abélien, et m est un entier, nous définissons $mH = \{b: b \in H, \text{ il existe } a \in H, \text{ tel que } b = ma\}$. Si H n'a pas de torsion, et H' est un sous-groupe de H , nous convenons de noter $(1/m)H'$ le sous-groupe $H'' = \{a: a \in H, ma \in H'\}$ de H .

est valable.

Remplaçons 1 par le nombre complexe $\xi (\neq 0)$ dans le second membre de (6), et notons Q_ξ^n la quadrique ainsi définie; de même S_ρ^n , ρ réel, > 0 , désigne la sphère obtenue en remplaçant le second membre de (7) par ρ . S_ρ^n est alors un cycle de Q_ρ^n . Si $\rho \rightarrow 0$, la sphère S_ρ^n tend vers le sommet du cône complexe

$$(11) \quad CQ^n: z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0, \quad z_i \text{ complexe}$$

de l'espace affine complexe C^{n+1} . À S^n correspond donc "par continuité" un cycle ~ 0 dans CQ^n . Pour cette raison S. Lefschetz appelle le cycle S^n de Q^n *cycle évanouissant*.² Nous ne formulons pas en homologie la notion de "variation continue d'un cycle", car la notion correspondante en cohomologie est très simple.³ Le premier membre de (6) définit une application $q: C^{n+1} \rightarrow C$, et $Q_\xi^n = q^{-1}(\xi)$. Le 0 de C est la seule valeur critique de q , son faisceau image est donc ponctuellement constant dans $C - \{0\}$ (Fáry [5], Définition 2 du n° 2). Cela précise la variation continue de $l \in H^n(q^{-1}(1))$. Dans le n° 7 nous prouvons: Si

$$(12) \quad U = \bigcup_{|\xi| \leq \varepsilon} Q_\xi^n \quad (\varepsilon > 0)$$

est un voisinage fermé de $CQ^n = q^{-1}(0)$, deux cas peuvent se présenter:

$$(13) \quad n \text{ est impair: } H^n(U) \approx A, \text{ et il existe } l' \in H^n(U), \text{ tel que } l = Q^n l'$$

$$(14) \quad n \text{ est pair: } H^n(U) = 0$$

(dans le second cas il ne peut pas y avoir l' donnant l par la section). Vu (13), (14) la classe de cohomologie de S^n ne peut pas être appelée "évanouissante"; nous l'appelons donc classe de Lefschetz.

Cela posé, nous passons à la définition générale des cycles évanouissants et des classes de Lefschetz d'un $V^n \subset V^{n+1}$. Celles-ci seront définies pour les V^n , qui sont "près" d'une variété V_0^n ayant un seul point double quadratique; "près" de la singularité en question ces variétés sont des morceaux de quadriques, et l'on peut utiliser le Théorème 3. De façon précise, nous posons la

DÉFINITION 4. Soit V^{n+1} une variété algébrique sans singularités dans C^t , et V^n une sous-variété sans singularités de V^{n+1} . Supposons qu'il existe un $V_0^n \subset V^{n+1}$ ayant un point double c , et un système de coordonnées locales (z_i)

² A vrai dire la définition de Lefschetz ([1], p. 93) est axiomatique, car elle donne la propriété caractéristique des cycles évanouissants (cf. Théorème 1 du n° 6, et Proposition 2 du n° 11); notons que les classes de Lefschetz interviennent par cette définition axiomatique dans le Théorème B du n° 2. S. Lefschetz ne remarque pas l.c. que le cycle qu'il note δ_i est bien la partie réelle d'une quadrique, donc une sphère; cette remarque nous sera très utile dans la suite.

³ Comme Q^n est une variété orientée il faut identifier son homologie à sa cohomologie (cf. n° 5). CQ^n n'est pas une variété, on ne peut pas donc faire une telle identification (cf. (30), (31) du n° 6). Pour cette raison il vaut mieux de ne pas considérer l'homologie de CQ^n .

d'origine c dans V^{n+1} , tels que: 1° tout système de nombres z_i satisfaisant à

$$(15) \quad B: |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}| \leq 2$$

appartient au domaine des coordonnées; 2° $V_0^n \cap B$ est donné par l'équation (11) et l'inégalité (15); 3° $V^n \cap B$ est donné par l'équation (6), et l'inégalité (15). La sphère (7) est alors un cycle de V^n , et sa classe de *cohomologie* sera appelée *classe de Lefschetz de V^n* .

Comme la définition précédente est trop restrictive, nous la généralisons ci-dessous.

Soit $\{V_\xi^n\}$ une série linéaire sur V^{n+1} , où ξ varie sur le plan de Cauchy C . Nous envisageons des courbes $\xi(t)$, t réel, $0 \leq t \leq 1$, différentiables par morceaux, et ayant un nombre fini de points doubles au plus; nous notons V_t^n l'élément de la série linéaire correspondant à $\xi = \xi(t)$. Nous utilisons le fait suivant: si V_t^n est sans singularités pour $t_0 \leq t \leq t_1$, il existe un isomorphisme unique $H(V_{t_0}^n) \approx H(V_{t_1}^n)$ (correspondant aux valeurs croissantes de t).

DÉFINITION 5. Nous définissons la *classe de Lefschetz* $l = l(V^n, \xi(t))$ attaché à une variété sans singularités $V^n \subset V^{n+1}$, et à une courbe $\xi(t)$ dans les conditions suivantes: 1° les V_t^n sont dépourvus de singularités pour $0 < t \leq 1$, et appartiennent à une série linéaire; 2° V_0^n a un seul point double quadratique non dégénéré, $V_1^n = V^n$. Dans ces conditions il existe un $\varepsilon > 0$, tel que la classe de Lefschetz de V_t^n est définie au sens de la Définition 4 pour $0 < t \leq \varepsilon$. A cette classe de cohomologie correspond la classe $l = l(V^n, \xi(t))$ de $H(V^n)$ que nous appelons *classe de Lefschetz attachée à ces données*.

DÉFINITION 6. Soient $W^n \subset W^{n+1}$ des variétés algébriques sans singularités dans l'espace projectif complexe P^l . La partie affine V^n de W^n est un ouvert de W^n , on peut donc envisager l'injection $i: H(V^n) \rightarrow H(W^n)$. Si l est une classe de Lefschetz de V^n (attachée à une courbe quelconque), nous appelons $\bar{l} = i(l)$ *classe de Lefschetz de W^n* .

Notons qu'à tout couple de variétés W^n , W_0^n on peut attacher une classe de Lefschetz de W^n , si ces variétés sont tracées sur la même variété sans singularité W^{n+1} , W^n étant sans singularités, et W_0^n ayant un seul point double quadratique non dégénéré. Cela posé, nous avons le

COROLLAIRE 1. Si la dimension n est PAIRE, et $\bar{l} \in H^n(W^n)$ est une classe de Lefschetz en cohomologie à coefficients entiers de la variété sans singularités W^n , alors $\bar{l} \neq 0$. A fortiori les classes de Lefschetz de dimension paire des variétés affines sont non nulles en cohomologie à coefficients entiers.

Ce résultat découle immédiatement de (10): comme $l^2 \neq 0$, $l \neq 0$, et même $\bar{l} \neq 0$. Si n est IMPAIR, $\bar{l}$ peut être NUL: c'est le cas des quadriques complexes de dimension impaire. Toutefois, ce cas est en quelque sorte exceptionnel.⁴

⁴ M. Jean Leray a bien voulu me communiquer les précisions suivantes:

I. $\bar{l} \neq 0$, et $N(\gamma) = 0$ dans les cas que voici: 1° n est pair, et la caractéristique des corps des coefficients A est $\neq 2$; 2° W^n est une hypersurface de degré $\geq n + 1$.

II. Il se peut que $\bar{l} = 0$, et $N(\gamma) = A$, si n est impair, et W^n est une hypersurface de degré $\leq n$. Exemple: toute quadrique de dimension impaire.

Il a remarqué que II est en contradiction avec une affirmation implicite de Lefschetz

4. Cohomologie des intersections complètes affines et projectives

Nous donnerons assez complètement cette cohomologie en nous servant uniquement de l'algèbre spectrale (3), (4), du n° 2 et, dans le cas projectif, de la dualité de Poincaré. Nos conditions concernant les "intersections complètes" excluent certains cas de "dégénérescence", et en ce sens nous envisageons des variétés "suffisamment générales". Les hypersurfaces de Petrowsky [1] rentre dans cette classe; ce travail prouve l'existence des hypersurfaces satisfaisantes à nos conditions (l.c. p. 320). Dans le cas général nous ne cherchons pas à démontrer l'existence des variétés considérées; notons toutefois qu'il est facile de construire des intersections complètes de quadriques, et que la formule (24) donne dans ce cas un nombre de Betti connu par ailleurs.

DÉFINITION 1. Nous disons que la variété algébrique W^n de P^t est une intersection complète, s'il existe une suite croissante

$$(1) \quad W^n \subset W^{n+1} \subset \dots \subset W^{t-1} \subset P^t$$

de variétés algébriques de P^t ayant les propriétés suivantes: 1° W^{n+i} est irréductible et sans singularités pour tout i , $0 \leq i \leq t - n$; 2° W^{n+i} appartient à un système linéaire $\{W_\xi^{n+i}\}$ de sous-variétés de W^{n+i+1} , dont la base est dans $W^{n+i+1} \cap P_\infty^{t-1}$, et tel que: α . W_ξ^{n+i} est dépourvu de singularités, si $\xi \notin \Gamma_i$, où Γ_i est un ensemble fini des ξ ; β . W_γ^{n+i} , $\gamma \in \Gamma_i$, possède un point double quadratique non dégénéré au sens de la Définition 1 de l'Introduction.

DÉFINITION 2. Une variété algébrique V^n de l'espace affine complexe C^t est appelée intersection complète, si elle est la partie affine d'une intersection complète projective W^n (au sens de la définition précédente).

Si V^n est une intersection complète affine, il existe une suite croissante de variétés affines

$$(2) \quad V^n \subset V^{n+1} \subset \dots \subset V^{t-1} \subset C^t$$

ayant les propriétés suivantes: Pour tout i , $1 \leq i \leq t - n$, il existe une fonction

$$(3) \quad f_i: V^{n+i} \rightarrow C,$$

telle que

$$(4) \quad V^{n+i-1} = f_i^{-1}(\xi) \quad (i = 1, \dots, t - n)$$

pour un $\xi \in C$ convenablement choisi, qui n'est pas une valeur critique de f_i . Tous les points critiques de f_i sont quadratiques non dégénérés; Γ_i est l'ensemble des valeurs critiques de f_i . Nous prouvons dans le n° 7 (l.c. Lemme 1) que ces

[1]. En effet, on peut déduire des remarques de l.c. p. 24, 94 que l'auteur croit avoir démontré $l \neq 0$ en tous les cas. (Cela impliquerait que le second cas (29) de l'alternative du n° 2 est exclu en géométrie algébrique, donc $N(\gamma)$ y est superflu.) Or, $l = 0$, et $N(\gamma) = 4$ pour les quadriques complexes de dimension impaire. S. Lefschetz écarte cette possibilité dans le cas $n = 1$ en supposant les sections hyperplanes irréductibles (l.c., p. 24). Cette hypothèse est inefficace pour n impair > 1 , même dans le cas des quadriques.

propriétés de V^{n+i} et de f_i impliquent que (3) satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° 1. Cela permet d'appliquer les résultats du n° 2.

Explicitons à présent la première définition dans le cas, où W^n est une hypersurface de degré m dans l'espace projectif complexe P^{n+1} . Cette hypersurface est définie par une équation

$$(5) \quad W^n: g(x_0, \dots, x_n) = 0,$$

où g est un polynôme de degré m . Envisageons à présent la fonction

$$(6) \quad g(1, x_1, \dots, x_n)$$

et la variété affine

$$(7) \quad V^n: g(1, x_1, \dots, x_n) = 0$$

qu'elle définit. La fonction (6) donne une application

$$(8) \quad g: C^{n+1} \rightarrow C,$$

qui fait correspondre à $x = (x_1, \dots, x_{n+1})$, $x \in C^{n+1}$, la valeur de g en ce point. L'image réciproque

$$(9) \quad g^{-1}(\xi) = V^n: g(1, x_1, \dots, x_{n+1}) = \xi \quad (\xi \in C)$$

est une hypersurface affine. Les points d -critiques de l'application (8) sont les $c \in C^{n+1}$, qui satisfont au système d'équations

$$(10) \quad \frac{\partial g}{\partial x_1} = 0, \dots, \frac{\partial g}{\partial x_{n+1}} = 0.$$

Les solutions de (10) peuvent constituer une variété algébrique quelconque, mais nos hypothèses entraînent que (si P_∞^n de la Définition 1 est donné par $x_0 = 0$) nous avons

$$(11) \quad \mu = (m - 1)^{n+1}$$

points distincts $c_1, \dots, c_\mu$ satisfaisants à (10). L'hypothèse de la définition concernant les points doubles signifie: si nous développons g suivant les puissances des coordonnées de $x - c_i$, ce développement commence par une constante plus une forme quadratique non dégénérée.

THÉORÈME 1. *Soit V^n une hypersurface affine satisfaisante aux conditions de la Définition 2 (elle est donc définie par (7), où le premier membre satisfait aux conditions ci-dessus énumérées). Le module de cohomologie de V^n ne contient que des éléments de degré n et $2n$*

$$(12) \quad H^p(V^n) = 0, \quad \text{si } p \neq n, 2n,$$

donc

$$(13) \quad H(V^n) = H^n(V^n) + H^{2n}(V^n).$$

Le premier terme du second membre de (13) est un module libre, dont le rang est

$$(14) \quad \text{Rang } H^n(V^n) = (m - 1)^{n+1},$$

où m est le degré de l'hypersurface (cf. (11)). $H^{2n}(V^n)$ est isomorphe à l'anneau des coefficients A ; il possède un générateur bien déterminé, qui correspond à l'unité de A (cf. (15) du n° 5).

Explicitons le résultat analogue pour une hypersurface projective; rappelons que $H_F^p(W^n)$, $H_A^p(W^n)$ ont été définis antérieurement ((2), (5) du n° 3).

THÉOREME 2. Soit W^n une hypersurface satisfaisant aux conditions de la Définition 1; elle est donc définie par (5), où le polynome g possède les propriétés ci-dessus énumérées.

$$(15) \quad H_F^p(W^n) = 0, \quad \text{si } p \neq n, 2n.$$

Si l'hyperplan P^n de P^{n+1} n'est pas tangent à W^n , et $W^{n-1} = W^n \cap P^n$, la section $H(W^n) \rightarrow H(W^{n-1})$ établit une isomorphie

$$(16) \quad H^p(W^n) \approx H^p(W^{n-1}), \quad \text{pour } p \neq n-1, n.$$

Pour simplifier les énoncés, nous supposons dans la suite que Z est l'anneau des coefficients. Le groupe de cohomologie de W^n n'a pas d'élément d'ordre fini, donc

$$(17) \quad \text{Tors } H(W^n) = 0.$$

Les groupes de cohomologie sont complètement décrits par les relations suivantes:¹

$$(18) \quad H^p(W^n) = \begin{cases} Z, & \text{si } p \text{ est pair, } 0 \leq p \leq 2n \\ 0, & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} \quad p \neq n$$

$$(19) \quad H_A^p(W^n) = \begin{cases} H^p(W^n), & \text{si } 0 \leq p \leq n-1 \\ mH^p(W^n), & \text{si } p \geq n+1 \end{cases}$$

$$(20) \quad H^n(W^n) = \begin{cases} \{e'\} + H_F^n(W^n), & \text{si } n \text{ est pair, où } \{e'\} \approx Z \\ H_F^n(W^n), & \text{si } n \text{ est impair} \end{cases}$$

$$(21) \quad \text{Rang } H_F^n(W^n) = \sum_{j=1}^{n+1} (-1)^{n+1+j} (m-1)^j$$

où m est le degré de l'hypersurface.

La formule (20) donne une décomposition en somme directe

$$(22) \quad H^n(W^n) = H_A^n(W^n) + H_F^n(W^n) \quad (\text{corps de coefficients}),$$

si les coefficients constituent un corps dont la caractéristique ne divise pas m . Pour les hypersurfaces, cette formule est due à Petrowsky ([1], Theorem V, (97), p. 340; v. aussi Theorem VI, p. 340, et Theorem IV, p. 325 cf. Leray [3], n° 51, p. 97); nous la généralisons ci-dessous pour les intersections complètes.

Pour celles-ci nous trouverons, en effet, les mêmes résultats que pour les hypersurfaces, seules les formules explicites (14), (21) seront remplacées par des relations de récurrences. Le problème de détermination explicite des nombres de Betti sera donc ramené à un problème de la géométrie énumérative.

THÉOREME 3. Soit V^n une variété affine de C^t , intersection complète au sens de la Définition 2. Les classes de cohomologie de V^n sont de degré n et $2n$, donc (12),

(13) sont valables avec les présentes notations; le groupe de cohomologie de V^n n'a pas d'élément d'ordre fini. Soit V^{n+1} la seconde variété figurante dans la suite (2). Nous avons la formule récurrente

$$(23) \quad \Delta H^{n+1}(V^{n+1}) + \Delta H^n(V^n) = \mu_1$$

pour les nombres de Betti, si l'anneau des coefficients est un corps quelconque, où μ_1 désigne le nombre des valeurs critiques de la fonction f_1 de (3).

COROLLAIRE 1. Utilisons les notations du théorème précédent, et notons en général μ_i le nombre des valeurs critiques (points d-critiques) de f_i . L'anneau des coefficients étant un corps quelconque

$$(24) \quad \Delta H^n(V^n) = \mu_1 - \mu_2 + \cdots + \mu_{t-n}$$

donne le n -ième nombre de Betti de V^n ; les autres nombres de Betti sont nuls, sauf le $2n$ -ième, qui est 1.

THÉOREME 4. Soit W^n une variété algébrique de P^t intersection complète au sens de la Définition 1. Les relations (15)–(20), où l'anneau des coefficients est $\mathbb{Z}$, sont valables pour W^n . Soit l'anneau des coefficients un corps quelconque. Nous avons alors (22), et les formules récurrentes (équivalentes) que voici

$$(25) \quad \Delta H^n(W^n) = \Delta H^n(V^n) - \Delta H^{n-1}(W^{n-1}) + 1$$

$$(26) \quad \Delta H_F^n(W^n) = \Delta H^n(V^n) - \Delta H_F^{n-1}(W^{n-1})$$

où $W^{n-1} = W^n \cap P_{\infty}^{t-1}$, P_{∞}^{t-1} n'est pas tangent à W^n , et $V^n = W^n - W^{n-1}$.

COROLLAIRE 2. Utilisons les notations du théorème précédent, et soit l'anneau des coefficients un corps de caractéristique zéro. $H_A(W^n)$ est un idéal de $H(W^n)$. Le quotient $H(W^n)/H_A(W^n)$ est isomorphe à $H_F^n(W^n)$, ce dernier étant muni de la multiplication nulle.

Dans le théorème ci-dessous on peut envisager ou bien une intersection complète, ou bien plus généralement une variété affine sans singularités V^n , $n \geq 2$ ayant les propriétés suivantes: 1° $H^p(V^n) = 0$ pour $p \neq n, 2n$; 2° V^n possède une section hyperplane V_0^{n-1} ayant un seul point double quadratique non dégénéré.

THÉOREME 5. Soit V^n une intersection affine complète au sens de la Définition 2, ou plus généralement une variété algébrique affine sans singularités satisfaisante aux hypothèses 1°, 2° ci-dessus formulées. Notons V^{n-1} une section hyperplane non singulière de V^n . L'anneau des coefficients de la cohomologie soit un corps A . Dans ces conditions $H^n(V^n)$ est l'espace vectoriel des relations entre certains systèmes de classes de Lefschetz de V^{n-1} .

Explicitons l'énoncé du théorème. Notons $\{V_{\xi}^{n-1}\}$ une série linéaire de sections hyperplanes de V^n , qui contient V^{n-1} pour $\xi = \zeta$, dont les variétés V_{ξ}^{n-1} sont dépourvues de singularités pour $\xi \notin \Gamma$, où Γ est un ensemble fini de ξ , et dont les variétés V_{γ}^{n-1} , $\gamma \in \Gamma$, ont un seul point double quadratique non dégénéré. Une telle série linéaire existe grâce à la condition 2° (cf. la preuve du Lemme 2 du n° 7). Cela étant, associons à tout $\gamma \in \Gamma$ un arc λ_{γ} sans points multiples dans le plan des ξ , reliant γ à ζ . Notons l_{γ} la classe de Lefschetz du couple $(V^{n-1}, \lambda_{\gamma})$

(Définition 5 du n° 3). Formons l'espace vectoriel sur A des vecteurs $(a_\gamma)_{\gamma \in \Gamma}$ $a_\gamma \in A$, tels que

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} a_\gamma l_\gamma = 0.$$

Cet espace vectoriel est isomorphe à $H^n(V^n)$.

Ce résultat permet de décrire une "base d'homologie" de V^n . Grâce au Corollaire 2 (cf. aussi (22)) on peut donc décrire des cycles de W^n , dont les classes engendrent $H(W^n)$.

CHAPITRE 2. PRÉLIMINAIRES TOPOLOGIQUES ET GÉOMÉTRIQUES

5. Homologie et cohomologie des variétés orientées

Il est bien connu que, si V est une variété *orientée* il n'y a pas de distinction à faire entre l'homologie et la cohomologie de V (cf., par exemple, H. Cartan [1]; Lefschetz [3], V. §4, pp. 196–212; Leray [2], n° 10, pp. 194–199; de Rham [1], §§22, 23, pp. 106–118; Thom [1], p. 119). Toutefois, il n'est peut être pas inutile de formuler ce fait dans le cadre de la théorie de cohomologie de J. Leray, car on peut en donner un énoncé provisoire simple et frappant:

Si l'on caractérise les modules de cochaînes d'une *variété orientée* par des axiomes suffisamment généraux, le groupe des chaînes singulières satisfait à ces mêmes axiomes, donc *une chaîne est en même temps une cochaîne*.

1. Nous allons préciser cette affirmation en utilisant les résultats de H. Cartan [1] (pour ce qui suit *v.* aussi le résumé de Thom [1], pp. 115–120).

Rappelons d'abord la définition de la cohomologie en théorie de J. Leray: L'algèbre de cohomologie $H(X)$ de l'espace X est $H(K)$, où $[K]$, est une couverture fine de X (au sens de Fáy [5], n° 5).

Dans ce qui suit nous envisageons avec H. Cartan une notion généralisant celle de couverture fine d'un espace. Pour simplifier nous supposons que l'anneau des coefficients A est l'anneau des entiers Z , ou un corps. Module signifie donc groupe, ou espace vectoriel sur le corps A .

Soit K un module, $d: K \rightarrow K$ une application linéaire de K en lui-même, dont le carré dd est nul. Nous énonçons

(A) AXIOMES ALGÈBRIQUES: K est une somme directe

$$(1) \quad K = \sum_{-\infty < p < \infty} K^p;$$

$$(2) \quad dK^p \subset K^{p+1}.$$

Cela posé, on définit $H(K) = \sum H^p(K)$, comme d'habitude.

Désignons par S une application de K dans la famille de parties COMPACTES d'un espace X : si $k \in K$, $S(k)$ est un compact de X . Nous imposons à cette fonction S les axiomes

(S) AXIOMES DU SUPPORT: $S(k)$ est un compact de X , tel que:

$$(3) \quad S(\alpha k) = \emptyset, \quad \alpha \neq 0, \quad \text{équivaut} \quad k = 0 \quad (k \in K; \alpha \in A)$$

$$(4) \quad S(\alpha k + \beta l) \subset S(k) \cup S(l) \quad (k, l \in K; \alpha, \beta \in A)$$

(5) si $p \neq q$, $k \in K^p$, $l \in K^q$, alors $S(k + l) = S(k) \cup S(l)$

(6) $S(dk) \subset S(k)$.

Cela posé, on définit $K_V = \{k: k \in K, S(k) \subset V\}$, et $FK = K/K_V$, où $V = X - F$, comme les structures analogues dans Fáy [5], n° 5. On peut ensuite formuler

(7) (U) AXIOME DE L'UNITÉ: Si C est un compact connexe, $H^0(CK) = A$.

(8) (P) AXIOME DE POINCARÉ: $H(xK) = H^0(xK)$ pour tout point x de X .

L'axiome (U) doit être explicité comme suit (et cela est important): A tout compact connexe C de X correspond une isomorphie $\varphi_C: H^0(CK) \rightarrow A$, telle que, si D est un compact connexe dans C , alors la section $D: H^0(CK) \rightarrow H^0(DK)$ commute avec φ_D , donc $\varphi_C(h) = \varphi_D(Dh)$ pour tout $h \in H^0(CK)$.

Nous disons qu'une structure (K, d, S) satisfaisant à ces axiomes est une *pseudo-couverture⁵ homotopiquement fine*, si les conditions suivantes sont remplies: A tout recouvrement fini ouvert $\{U_i\}$ de X correspondent des applications linéaires

$$\lambda_i: K \rightarrow K, \quad \lambda_i(K^p) \subset K^p, \quad S(\lambda_i k) \subset U_i$$

$$\mu: K \rightarrow K, \quad \mu(K^p) \subset K^{p-1}$$

telles que

$$(9) \quad \sum_i \lambda_i + d\mu + \mu d = \text{identité de } K$$

(cf. "chain homotopy").

Cela posé, H. Cartan [1] donne le résultat suivant:

THÉORÈME 1 (de H. Cartan). Si $[K_1], [K_2]$ sont des pseudo-couvertures homotopiquement fines d'un même espace X (ayant le même anneau des coefficients A), alors

$$(10) \quad H(K_1) \approx H(K_2).$$

Cet isomorphisme est le produit des isomorphismes $H(K_1) \approx H(K_1 \circ K_2) \approx H(K_2)$.

Les couvertures fines sont des pseudo-couvertures homotopiquement fines selon leur définition même (elles ont une structure plus particulière: K est une algèbre $K^p = 0$ pour $p < 0$, etc.). Nous avons donc:

COROLLAIRE 1. Si $[K]$ est une pseudo-couverture homotopiquement fine de X

$$(11) \quad H(K) = H(X)$$

est valable.

En explicitant l'isomorphisme de (11) on justifie la définition suivante:

DÉFINITION 1. Un élément $k \in K$ du module d'une pseudo-couverture homotopiquement fine de X est appelé cochaîne de X . Si $dk = 0$, k est nommé cocycle. Dire que deux cocycles k_1, k_2 sont cohomologues ($k_1 \sim k_2$), c'est dire que

⁵ H. Cartan [5] utilise le terme "carapace" (cf. aussi Thom [1]) pour désigner une notion analogue. (N.B. nous n'utilisons cette terminologie que dans le présent n°.)

$k_1 - k_2 = dl$ dans une pseudo-couverture homotopiquement fine, qui contient k_1, k_2 .

2. Soit $C(X) = \sum C_p(X)$ le module des chaînes singulières à coefficients dans A . Rappelons: Un simplexe singulier s^p est une application $\varphi: \Delta^p \rightarrow X$ d'un simplexe affine Δ^p de dimension p dans X , l'ensemble des sommets de Δ^p étant totalement ordonné. $\varphi(\Delta^p) \subset X$ est appelé support de s^p ; il est noté $S(s^p)$. Les s^p constituent par définition une A -base de $C_p(X)$. Si $c \in C_p(X)$, le support $S(c)$ est par définition la réunion des $S(s^p)$, où s^p parcourt les simplexes singuliers figurant avec un coefficient non nul dans c . Nous utilisons l'opérateur de bord usuel $\partial: C_p(X) \rightarrow C_{p-1}(X)$ pour $p \geq 1$, et nous posons $\partial(C_0(X)) = 0$. Si $p < 0$ nous convenons de poser $C_p(X) = 0$. Nous notons $H_p(X)$ le module $Z_p(X)/B_p(X) = (\text{cycles de } C_p(X))/\partial C_{p+1}(X)$; soit $H_*(X) = \sum H_p(X)$.

Si X est un espace topologique quelconque $H_*(X)$ n'a guère d'intérêt (il se peut que tout simplexe singulier soit une application constante, donc $H_*(X)$ n'a pas de lien avec les propriétés géométriques de X , qui pourtant sont bien décrites par les propriétés de l'algèbre de cohomologie $H(X)$ de X). Soit à présent $X = V$ une variété, dont tous les composants connexes sont de dimension N . Posons:

$$(12) \quad L^p = C_{N-p}(V) \quad (N = \dim V).$$

Munissons

$$(13) \quad L = \sum_{-\infty < p < \infty} L^p$$

des ∂, S ci-dessus définis. Cela étant, on a la proposition suivante, dont la preuve est non banale:

PROPOSITION 1 (de H. Cartan). *V étant une variété orientable, et munie d'une certaine orientation, (L, ∂, S) est une pseudo-couverture homotopiquement fine.*

Dans ce qui suit nous disons variété orientée au lieu de "variété orientable, et munie d'une certaine orientation".

COROLLAIRE 2. *Si V est une variété orientable, connexe, il existe deux isomorphismes*

$$(14) \quad H_p(V) \approx H^q(V) \quad (p + q = \dim V)$$

entre les modules d'homologie et de cohomologie de V . À chacune des deux orientations de V correspond une isomorphie (14).

En fait, on a un énoncé plus précis, qui justifie ce que nous avons affirmé dans l'introduction de ce n°:

COROLLAIRE 3. *Si V est une variété orientée, toute chaîne singulière est une cochaîne au sens de la Définition 1. Une chaîne fermée est un cocycle, et sa classe de COHOMOLOGIE $h \in H(V)$ est bien déterminée; cycles homologues possèdent la même classe de cohomologie.*

3. Soit C^n l'espace affine complexe à coordonnées $z = (z_1, \dots, z_n)$, $z_\alpha = x_\alpha + iy_\alpha$, $\alpha = 1, \dots, n$, $i^2 = -1$. De façon précise: i désigne l'une des racines de $i^2 = -1$ choisie une fois pour toute. Utilisons la construction de Fáry ([4], (21), p. 123): Soit v_α la fonction caractéristique du demi-espace $x_\alpha \geq 0$, et w_α

celle de $y_\alpha \geq 0$ ($\alpha = 1, \dots, n$). En cohomologie d'Alexander à coefficients entiers on peut former les différentielles dv_α, dw_α (cf. l.c. (7), p. 108), et le produit

$$(15) \quad c = dv_1 dw_1 \cdots dv_n dw_n$$

("cup product") est un cocycle de C^n , dont la classe de cohomologie est indépendante du choix des coordonnées z_α . Cette classe de cohomologie sera appelée générateur positif de $H^{2n}(C^n)$. C^n est donc muni d'une orientation (bien déterminée, puisque nous avons fixé une fois pour toute une racine de $i^2 = -1$). Cela posé, toute variété analytique complexe est munie d'une orientation naturelle, et sera considérée comme orientée.

Soit P^n l'espace projectif complexe. $H(P^n)$ est une algèbre de polynômes ayant un générateur $e_2 \in H^2(P^n)$, tel que $e_2^{n+1} = 0$. Nous appelons générateur positif de $H^2(P^n)$ la classe e_2 , telle que e_2^n soit le générateur positif de $H^{2n}(P^n)$, donc la classe contenant le cocycle (15). $P^1 e_2$ (P^1 étant une droite de P^n) est alors le générateur positif de $H^2(P^1)$, il contient donc le cocycle (15) pour $n = 1$; ce fait pourrait servir pour définir le générateur positif de $H^2(P^n)$.

COROLLAIRE 4. Si V est une variété analytique complexe connexe, (L, ∂, S) de (12), (13) est une pseudo-couverture homotopiquement fine de V . Tout cycle singulier est un cocycle (au sens de la Définition 1) possède donc une classe de cohomologie bien déterminée.

Soit E un fermé quelconque de la variété analytique complexe V . $[EL]$ est la section d'une pseudo-couverture homotopiquement fine, donc la même structure pour E . Vu (11) du Corollaire 1, nous avons le

COROLLAIRE 5. Soit E une partie fermée d'une variété analytique complexe, connexe V . Si c est une chaîne singulière de V , et le support $S(\partial c)$ de son bord ne rencontre pas E , la section Ec est un cocycle de E (au sens de la Définition 1), et sa classe de cohomologie dans $H(E)$ est bien déterminée.

Dans le n° suivant nous aurons besoin de ce fait que nous illustrons à présent par un exemple. Soit $S^2: x^2 + y^2 + z^2 = 1$ la sphère ordinaire dans l'espace euclidien orienté R^3 . (N.B. le Corollaire 5 vaut pour toute variété orientée, donc pour R^3 , bien entendu.) Désignons par E un fermé de R^3 , tel que: 1° $S^2 \subset E$; 2° $R^3 - E$ a deux composants connexes; 3° $(0, 0, 0)$ et $(2, 0, 0)$ n'appartiennent pas à E . Nous ne faisons pas d'autres hypothèses concernant E ; il peut être localement non connexe, etc. Cela dit, soit s^1 le segment orienté $0 \leq x \leq 2, y = 0, z = 0$. Es^1 est alors un cocycle de E , dont la classe de cohomologie engendre $H^2(E) \approx A$. Cette remarque contient en germe une démonstration d'une généralisation du théorème de Jordan-Brouwer valable pour les fermés quelconques d'un espace euclidien (cf. Fáry [5], la note 5).

Dans cet exemple, ainsi que dans la preuve des lemmes du n° 6 nous nous servons des chaînes, là où l'on utilise d'habitude des cochaînes au sens usuel du mot. Montrons à présent un exemple d'utilisation des cochaînes à la place des chaînes.

Donnons nous $P^{n-1} \subset P^n$. $P^n - P^{n-1} = C^n$, nous pouvons donc construire une suite croissante de boules fermées $B_1 \subset B_2 \subset \dots$, telle que $\bigcup B_j =$

$P^n - P^{n-1}$. A tout B_j faisons correspondre un cocycle $c_j \in K$, où $[K]$ est une *couverture fine* donnée de P^n , tel que

$$(16) \quad c_j \in e_2; \quad B_j \cap S(c_j) = \emptyset \quad (e_2 : \text{générateur positif de } H^2(P^n)).$$

C'est possible, car $B_j e_2 = 0$. Nous avons donc une suite de cocycles de classe de cohomologie e_2 , dont les supports convergent vers le P^{n-1} donné.

Cela posé, soit

$$(17) \quad W^{n-1}: a(x_0, \dots, x_n) = 0 \quad (n \geq 2)$$

une hypersurface donnée de P^n , où a est un polynome homogène de degré m (donc non identiquement nul), sur lequel nous ne faisons aucune hypothèse. Définissons une application $g: P^n \rightarrow P^n$ comme suit:

$$(18) \quad g(x_0, \dots, x_n) = (a(x_0, \dots, x_n), x_1^m, \dots, x_n^m).$$

Alors $g^{-1}(P_\infty^{n-1}) = W^{n-1}$, où $P_\infty^{n-1}: x_0 = 0$. g transforme donc par image réciproque la suite (16) de cocycles en une suite $c'_j = g^{-1}(c_j)$ de cocycles de $[g^{-1}K]$, telle que

$$(19) \quad c'_j \in m e_2, \quad \lim S(c'_j) = W^{n-1} \quad (m: \text{degré de } a; e_2 \in H^2(P^n)).$$

En effet, $g^{-1}(e_2^n) = m^n e_2^n$ selon (18) et (15). En résumé:

Si W^{n-1} est une hypersurface algébrique de degré m dans P^n , il existe une suite de cocycles $\{c_j\}$ d'une couverture fine donnée, quelconque de P^n , telle que $S(c_j)$ tend vers W^{n-1} , et que $c_j \in m e_2$ pour tout j , où e_2 est le générateur positif de $H^2(P^n)$.

Il nous semble que c'est à partir de cette remarque que l'on obtient le plus facilement un "théorème de Bézout" valable sans restriction, ainsi que la construction des cocycles algébriques des sous-variétés de P^n . (N.B. on peut parler des classes algébriques des fermés quelconques de P^n .) Exemple: la preuve de la Proposition 3 du n° 3 est immédiate. La proposition peut être complétée comme suit: Dans tout voisinage de $W_1^{t-1} \cap W^n$, où W_1^{t-1} est une hypersurface de degré m_1 de P^t , il existe un cocycle de W^n , dont la classe est m_1 -fois le générateur positif de $H^2(W^n)$.

4. On appelle (14) parfois "dualité de Poincaré". Dans le présent travail on pourrait éviter cette isomorphie, qui nous sert seulement pour définir commodément des classes de cohomologie (v. Définition 4 du n° 3). Par contre, les relations (20), (21), (22) ci-dessous, que nous appelons *théorèmes de dualité de Poincaré*, seront importantes pour nous.

Soit W^n une variété analytique compacte, connexe, de dimension complexe n . On a

$$(20) \quad \text{Tors } H^p(W^n) \approx \text{Tors } H^{2n-p+1}(W^n)$$

$$(21) \quad \text{Rang } H^p(W^n) = \text{Rang } H^{2n-p}(W^n)$$

en cohomologie à coefficients entiers. De plus,

$$(22) \quad \text{si } \text{Tors } H(W^n) = 0, \quad \text{alors } H^p(W^n) \approx H^{2n-p}(W^n).$$

Dans ce cas l'existence des "bases duales" s'énonce comme suit: Soit (h, k) l'indice de Kronecker, c'est-à-dire l'entier, tel que

$$hk = (h, k)e$$

où $h \in H^p(W^n)$, $k \in H^{2n-p}(W^n)$, et e est le *générateur positif* de $H^{2n}(W^n)$. Il existe une base $h_1, \dots, h_s$ dans $H^p(W^n)$, et une base $k_1, \dots, k_s$ dans $H^{2n-p}(W^n)$, telles que $(h_i, k_j) = \delta_{ij}$, c'est-à-dire 1 pour $i = j$, et 0 pour $i \neq j$.

5. Les remarques suivantes concernent la méthode, et ne seront pas utilisées dans la suite.

Soit $\{H_p(X, Y), \partial, f_{*p}\}$ une théorie d'HOMOLOGIE au sens de Eilenberg et Steenrod définie au moins pour la catégorie des couples (X, Y) , où X est un complexe simplicial localement fini, et Y est un sous-complexe fermé. Nous supposons que pour les complexes simpliciaux $H_p(X)$ est isomorphe au groupe d'homologie des "chaînes finies" de X .

Cela posé, nous allons prouver (cf. Fáy [4], VII.5 p. 128):

Dans une théorie d'homologie satisfaisante aux conditions ci-dessus formulées les groupes de cohomologie à supports compacts figurent à notation près, au moins pour les espaces séparables, métriques et de dimension finie.

En effet, si E est un espace séparable, métrique, et de dimension $\leq n$, il est homéomorphe à un sous-espace fermé E' de R^{2n+1} . $X = R^{2n+1} - E'$ est un complexe simplicial localement fini (de Rham [1], p. 115), $H_q(X)$ est donc défini dans la théorie d'homologie envisagée. Or, $H_q(X) \approx H^p(X)$, $p = 2n + 1 - q$, selon (14), et $H^p(X) \approx H^{p-1}(E)$ grâce à la suite exacte de cohomologie de R^{2n+1} , E' , X . D'où l'affirmation.

6. Cohomologie des quadriques complexes

Cette cohomologie est importante dans les applications des résultats du n° 2 en géométrie algébrique, car les invariants $N(\gamma)$, $Q(\gamma)$ attachés aux points critiques quadratiques s'expriment à l'aide de la cohomologie des quadriques complexes.

Outre la détermination de cette cohomologie nous donnons des résultats liés à celle-ci. Le Théorème 1 ci-dessous est dû à S. Lefschetz ([1], p. 93). Sa preuve utilise une induction par rapport à la dimension que la présente preuve évite grâce à une définition explicite et directe des cycles évanouissants, qu'on ne trouve pas l.c. La preuve ci-dessous est due à J. Leray (Cours professés au Collège de France, Janvier-Mars 1955); je la publie avec sa permission. Elle utilise la construction de l'espace $E \approx Q^n$ de (2) ci-dessous, qui permet de prouver très simplement le Théorème 3 du n° 3 (cf. aussi Fáy [2], Théorème 1 et Corollaire 1).

1. Dans ce qui suit $z = (z_1, \dots, z_{n+1})$ est un point de C^{n+1} .

$$x = (x_1, \dots, x_{n+1}), \quad y = (y_1, \dots, y_{n+1})$$

sont des vecteurs de l'espace euclidien R^{n+1} , donc x_j, y_j sont réels. Nous posons:

$$(1) \quad (x, y) = x_1 y_1 + \dots + x_{n+1} y_{n+1}, \quad \|x\|^2 = (x, x).$$

Soit

(2) E : l'ensemble des vecteurs tangents (de longueur ≥ 0) de la sphère

$$(3) \quad S^n: \|x\|^2 = 1$$

dans l'espace R^{n+1} . E est donc une variété analytique réelle définie par

$$(3') \quad E: \|x\|^2 = 1, \quad (x, y) = 0$$

dans l'espace produit $R^{n+1} \times R^{n+1}$.

LEMME 1. La quadrique complexe

$$(4) \quad Q^n: z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 1, \quad (Q^n \subset C^{n+1})$$

est homéomorphe à E . L'application $(x, y) \rightarrow (z_k)$, où

$$(5) \quad z_k = x_k(1 + \|y\|^2)^{\frac{1}{2}} + iy_k \quad (k = 1, \dots, n+1; i^2 = -1),$$

définit une homéomorphie de E sur Q^n .

Notons encore que l'homéomorphie en question fait correspondre à

$$(6) \quad E_\alpha = \{(x, y): (x, y) \in E, \|y\|^2 \leq \alpha\}$$

la partie $Q^n \cap B_\alpha$ de (4), où

$$(7) \quad B_\alpha: |z_1|^2 + \dots + |z_{n+1}|^2 \leq 1 + 2\alpha,$$

elle est donc l'identité sur S^n . Au lieu de parler de l'homéomorphie (5) nous utiliserons dans la suite (x, y) comme paramètres de Q^n , qui satisfont à (3').

PREUVE DU THÉORÈME 3 DU N° 3. Définissons une rétraction par déformation

$$(8) \quad r: Q^n \times I \rightarrow Q^n \quad (I: 0 \leq t \leq 1, \quad t \text{ réel})$$

en posant: $r[(x, y), t] = (x, ty)$, pour tout t , $0 \leq t \leq 1$. Les propriétés de cette rétraction prouvent que

$$(9) \quad H^p(Q^n) \approx H^p(S^n), \quad \text{si } p \neq 0, 2n,$$

d'où (8), (9) du n° 3. L'indice de Kronecker (l, l) sera déterminé plus loin.

NOTE. $r|Q^n \times \{0\}$ n'est pas une application propre, (9) ne signifie donc pas que la section $H^n(Q^n) \rightarrow H^n(S^n)$ est une isomorphie. (10) du n° 3 revient à dire que, si n est pair l'image est $2H^n(S^n)$ (en cohomologie à coefficients entiers), et si n est impair l'image est 0.

LEMME 2. La section $H(Q^n \cap B_\alpha) \rightarrow H(S^n)$ est une isomorphie, où B_α est la boule compacte (7).

PREUVE. La restriction $r| (Q^n \cap B_\alpha) \times I$ est une rétraction par déformation de $Q^n \cap B_\alpha$ sur S^n , et $r| (Q^n \cap B_\alpha) \times \{0\}$ est une application propre (l'image réciproque de tout compact est un compact). D'où le lemme.

LEMME 3. Soit B_α^0 l'intérieur de (7), donc une boule ouverte. L'injection $i: H(Q^n \cap B_\alpha^0) \rightarrow H(Q^n)$ est une isomorphie.

PREUVE. Grâce à (9) du n° 3 nous avons $iH(Q^n \cap B_\alpha^0) = H(Q^n)$, il suffit donc

de prouver que $H(Q^n \cap B_\alpha^0) \approx H(Q^n)$. Or, soit $t(\|y\|)$ une fonction réelle continue et croissante, 0 pour $\|y\| = 0$, et telle que $t(\|y\|) \rightarrow \alpha$, quand $\|y\| \rightarrow \infty$. $(x, y) \rightarrow (x, t(\|y\|)y)$ est alors une homéomorphie de Q^n sur $Q^n \cap B_\alpha^0$, ce qui prouve l'affirmation.

COROLLAIRE 1. *Envisageons les quadriques*

$$(10) \quad Q_\varphi^n: z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = e^{i\varphi}$$

dépendantes d'un paramètre réel φ , $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Notons θ l'automorphisme que subit $H(Q_0^n)$ quand φ décrit $0 \leq \varphi \leq 2\pi$. Nous avons alors

$$(11) \quad \theta(h) = (-1)^{n+1}h \quad \text{pour } h \in H^n(Q_0^n).$$

$\theta | H^{2n}(Q_0^n)$ est l'identité.

PREUVE. θ correspond à l'application antipodaire $z \rightarrow -z$ de Q_0^n en elle-même. Or, cette application change ou conserve l'orientation de S^n suivant la parité de n . Vu (9) du n° 3 cela prouve (11). Le générateur positif de $H^{2n}(Q^n)$ étant défini par (15) du n° 5, il est conservé par θ . Cela complète la preuve du corollaire.

2. Nous préparons à présent la preuve du Théorème 1 ci-dessous. Ce théorème donne la structure du faisceau image $\mathfrak{F}$ de f du n° 1 dans le cas, où les points critiques sont quadratiques non dégénérés. Notons que ce résultat ne sera pas utilisé dans la preuve du Théorème B du n° 2, mais il facilite dans le n° 15 le calcul de la caractéristique de l'algèbre spectrale (3), (4) du n° 2.

LEMME 4. *Il existe une application continue $T: E_\alpha \rightarrow E_\alpha$ (cf. (6), $E_\alpha = Q^n \cap B_\alpha$), telle que $T(S^n) = S^n$, $T(E_\alpha - E_\varepsilon) = E_\alpha - E_\varepsilon$, pour un ε , $0 < \varepsilon < \alpha$, et que*

$$(12) \quad T | S^n \quad \text{est homotope à l'application } x \rightarrow -x$$

$$(13) \quad T | (E_\alpha - E_\varepsilon) \quad \text{est homotope à l'application identique.}$$

La classe d'homotopie d'une telle application T est déterminée. Si $h \in H^n(E_\alpha)$ est un générateur, et Σ un cocycle de E_α , dont la classe est h , alors

$$(14) \quad \Sigma - T^{-1}(\Sigma) \quad \text{est un cocycle de } E_\beta, \quad \varepsilon < \beta < \alpha, \quad \text{cohomologue à } S^n \text{ dans } E_\beta.$$

NOTE. Dans l'énoncé de ce lemme nous avons utilisé le Corollaire 4 du n° 5. Disons d'avance que dans la preuve Σ sera une boule de Q^n dont la sphère frontière ne rencontre pas E_α (cf. Corollaire 5 du n° 5).

PREUVE. Nous prouvons d'abord l'existence de T . Soit $\theta(\|y\|)$ une fonction continue à valeurs réelles, telle que

$$(15) \quad \theta(0) = -\pi, \quad \theta(\varepsilon) = 0$$

$$(16) \quad \theta(\|y\|) \text{ est linéaire pour } 0 \leq \|y\| \leq \varepsilon, \text{ constante pour } \|y\| \geq \varepsilon.$$

Considérons un vecteur $(x, y) \in E_\alpha$ de $R^{n+1} \times R^{n+1}$, tel que $y \neq 0$. Ce vecteur détermine un grand cercle orienté sur S^n , qui passe par x . Nous déplaçons le vecteur y dans le sens négatif à distance $\theta(\|y\|)$ sur ce cercle sans changer sa longueur (E étant considéré comme l'ensemble des vecteurs tangents de S^n , c'est un déplacement par transport parallèle lelong d'une géodésique de S^n).

Soit (x', y') le résultat de cette opération, et posons $T(x, y) = (x', y')$. Si $\|y\| \rightarrow 0$, $(x', y') \rightarrow (-x, 0)$ vu la première équation de (15). Si nous convenons donc $T(x, 0) = (-x, 0)$, nous obtenons une application continue T de E_α sur lui-même, ayant les propriétés (12), (13); de façon précise: $T|S^n$ est l'application antipodaire, et $T|(E_\alpha - E_\varepsilon)$ est l'identité. Nous avons donc prouvé l'existence de T . Notons que le T que nous avons construit est *biunivoque*.

La classe d'homotopie de T est bien déterminée. En effet, celle de $T|S^n$ l'est, et une homotopie donnée de

$$T|(S^n \cup (E_\alpha - E_\varepsilon))$$

se prolonge par une homotopie de T , vu les propriétés de la rétraction (8).

Reste à prouver (14). Au lieu de calculer $\Sigma - T^{-1}(\Sigma)$, nous pouvons calculer $\Sigma - T(\Sigma)$, car le T construit est biunivoque. Nous pouvons en outre utiliser un $\Sigma = \Sigma_0$ particulier, qui sera une boule de E défini comme suit (cf. Corollaire 5 du n° 5):

$$(17) \quad \Sigma_0 = \{(x^0, y): (x^0, y) \in E_{2\alpha}\}$$

où x^0 est un vecteur fixé dans la suite. Dans R^{n+1} , Σ_0 est l'ensemble des vecteurs tangents y de S^n d'origine x^0 et de longueur $\leq 2\alpha$. Seul $(x^0, 0)$ appartient à $S^n \subset E_{2\alpha}$, donc $S^n \cap \Sigma_0 = (x^0, 0)$. Dans une métrique convenable de E les chaînes S^n , Σ_0 se coupent orthogonalement, d'où:

$$(18) \quad \text{l'indice de Kronecker } (S^n, \Sigma_0) \text{ des chaînes } S^n, \Sigma_0 \text{ de } E \text{ est } 1 \text{ en choisissant une orientation convenable } \Sigma_0.$$

Le Lemme 2, le Corollaire 5 du n° 5, et (18) prouvent donc que

$$(19) \quad \text{la section } E_\alpha \cdot \Sigma_0 \text{ est un cocycle de } E_\alpha, \text{ dont la classe de cohomologie engendre } H^n(E_\alpha) = H^n(Q^n \cap B_\alpha).$$

Cela dit, étudions l'image $T(\Sigma_0)$ de Σ_0 par T . Quand (x, y) décrit $\Sigma_0 \cap (E_\alpha - E_\varepsilon)$, $T(x, y) = (x, y)$, donc le support de $\Sigma_0 - T(\Sigma_0)$ est dans E_ε . Faisons décrire (x, y) la partie $\Sigma_0 \cap E_\varepsilon$. On a alors $x = x^0$, et $\|y\| \leq \varepsilon$. A tout point $x' \in S^n$, $x' \neq x^0$, on peut trouver un $(x^0, y) \in \Sigma_0 \cap E_\varepsilon$, tel que $T(x^0, y) = (x', y')$, où y' est bien déterminé par x' , et varie continûment avec ce dernier, quand celui-ci reste dans $S^n - x^0$. Autrement dit, une partie de $T(\Sigma_0)$ s'interprète comme champ continu de vecteurs tangents dans $S^n - x^0$. Au point x^0 les limites des vecteurs du champ sont tous les vecteurs (x^0, y) avec $\|y\| = \varepsilon$. $\Sigma_0 - T(\Sigma_0)$ a donc les propriétés suivantes:

$$(20) \quad \text{si } (x, y) \in S(\Sigma_0 - T(\Sigma_0)) \begin{cases} y \text{ est déterminé par } x, & \text{si } x \neq x^0, \\ \|y\| \leq \varepsilon, & \text{si } x = x^0, \end{cases}$$

où $S(\Sigma_0 - T(\Sigma_0))$ est le support de la chaîne $\Sigma_0 - T(\Sigma_0)$.

Définissons une homotopie de la chaîne $\Sigma_0 - T(\Sigma_0)$ dans E_ε . Il suffira de définir une homotopie du fermé $S(\Sigma_0 - T(\Sigma_0))$ dans E_ε . t étant le paramètre de l'homotopie, soit $r[(x, y), t] = (x, ty)$ pour $0 \leq t \leq 1$. Pour $t = 1$ nous avons

l'identité, et pour $t = 0$ nous obtenons le champ de vecteurs identiquement nuls, donc la sphère S^n . Cela prouve (14), et termine la démonstration du lemme.

LEMME 5. *Envisageons les quadriques (10). Il existe une famille d'applications*

$$(21) \quad g_\varphi: Q_0^n \rightarrow Q_\varphi^n \quad (0 \leq \varphi \leq 2\pi)$$

dépendant continûment de φ , et telle que

$$(22) \quad g_{2\pi} | (Q_0^n - B_\alpha) \text{ est l'application identique}$$

$$(23) \quad g_{2\pi} | (Q_0^n \cap B_\alpha) \text{ est homotope à } T \text{ du Lemme 4.}$$

PREUVE. La construction de g_φ est analogue à celle de T dans la preuve du Lemme 4. Soit $\theta(\varphi, \|y\|)$ une fonction continue de deux variables réelles à valeurs réelles, telle que

$$(24) \quad \theta(\varphi, \|y\|) = \begin{cases} \frac{1}{2}\varphi & \text{si } \|y\| \geq \alpha \\ 0, & \text{si } \|y\| \leq \varepsilon \end{cases} \quad (0 < \varepsilon < \alpha).$$

Définissons

$$(25) \quad T_\varphi: E_\alpha \rightarrow E_\alpha$$

comme suit: Si $(x, y) \in E_\alpha$, $y \neq 0$, nous déplaçons (x, y) en position (x', y') par transport parallèle le long de la géodésique déterminé par y dans le sens positif, à distance $\theta(\varphi, \|y\|)$, et nous posons $T_\varphi(x, y) = (x', y')$. T_φ se prolonge par continuité sur l'ensemble des points $(x, 0)$ de E_α , vu (24). Cela étant, soit

$$(26) \quad g_\varphi(z) = e^{\frac{1}{2}i\varphi} T_\varphi(x, y),$$

où z et (x, y) sont liés par (5) ($z = (z_1, \dots, z_{n+1})$). On constate alors que (22) est valable, et que $g_{2\pi}$ a les propriétés (12), (13), ce qui entraîne selon le Lemme 4 qu'il est homotope à l'application $T: E_\alpha \rightarrow E_\alpha$. La preuve du lemme est donc complète.

3. Dans ce qui suit nous envisageons la fonction f de (3) du n° 1; nous supposons, que ses points critiques sont quadratiques non dégénérés. Notons par κ un cercle du plan de Cauchy C centré à $\gamma \in \Gamma$ et de rayon $< \frac{1}{2} \min |\gamma_i - \gamma_j|$ ($i \neq j$). Si ξ décrit ce cercle, $H(F_\xi)$ subit un automorphisme que nous notons par θ_γ . La classe de Lefschetz $l_\gamma \in H(F_\xi)$ (appartenant au rayon du cercle en question) peut être définie de la même façon que dans le cas des variétés algébriques (cf. Définition 4 du n° 3). Soit $\xi - \gamma = \rho$ réel, positif, et si petit que la partie réelle de $F_\xi \cap B$ dans les coordonnées de (8) du n° 1 soit une sphère complète S^{n-1} . La classe de cohomologie de cette sphère dans $H^{n-1}(F_\xi)$ sera appelée *classe de Lefschetz* attachée à $\gamma \in \Gamma$.

Cela posé, nous pouvons énoncer une généralisation d'un théorème de S. Lefschetz ([1], p. 93, Théorèmes sur les Γ_{d-1} de C_u, I ; [2], p. 15, XV):

THÉORÈME 1. *Utilisons les notations ci-dessus introduites; envisageons la cohomologie à coefficients entiers. Nous avons alors*

$$(27) \quad h - \theta_\gamma(h) = (h, l_\gamma)l_\gamma \quad (h \in H^{n-1}(F_\xi))$$

où (h, l_γ) est l'indice de Kronecker. $h - \theta_\gamma(h) = 0$, si $h \in H^p(F_\xi)$, et $p \neq n - 1$.

NOTE. Il est presque évident que $h - \theta_\gamma(h)$ est un multiple de l_γ ; v. à ce sujet le Complement 4 du n° 2, et le n° 15. C'est donc la détermination du facteur (h, l_γ) , qui est important dans le théorème, comme l'a souligné S. Lefschetz ([1], p. 23). Nous utilisons ce résultat dans le n° 15 seulement, en nous servant du fait que $hl_\gamma \neq 0$ entraîne $h - \theta_\gamma(h) \neq 0$.

PREUVE. Nous utilisons les notations de la Proposition 3 du n° 1: c est le point d -critique de f sur F_γ , B est la boule (9) du n° 1 centrée à c , et $\hat{B}$ désigne la frontière de B . Selon la proposition citée $U - B$ ($U = f^{-1}(D)$) est un produit. On peut donc définir une application $g_\varphi: (E_\xi - B) \rightarrow (F_\zeta - B)$, où $\xi = \gamma + \rho$ est fixé, et $\zeta = \gamma + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$, est variable, telle que $g_{2\pi} | \hat{B} \cap F_\xi$ soit l'application identique. Nous pouvons donc prolonger cette application par g_φ du Lemme 5 sur la partie $F_\xi \cap B$ de F_ξ . Nous obtenons ainsi une application $g_\varphi: F_\xi \rightarrow F_\zeta$ pour tout $\zeta = \gamma + \rho e^{i\varphi}$, $0 \leq \varphi \leq 2\pi$.

$g_{2\pi}$ opère sur $H(F_\xi)$ comme l'application $T: F_\xi \rightarrow F_\xi$, qui est l'identité hors de B , et l'application T du Lemme 4 dans $F_\xi \cap B = Q^{n-1} \cap B_\alpha$.

Cela posé, prouvons (27). Soit k un cycle singulier de X , dont la classe de cohomologie est le h donné dans (27) (cf. Corollaire 4 du n° 5). Posons $G_\xi = F_\xi \cap B$, pour simplifier l'écriture. Vu le Lemme 2 nous avons

$$(28) \quad G_\xi k = G_\xi(m\Sigma_0 + \partial a),$$

où Σ_0 est la boule (17) considérée comme chaîne singulière, et ∂a est le bord d'une chaîne singulière. Dans (28) $m = (h, l_\gamma)$, puisque G_ξ , qui est homéomorphe à E_α du Lemme 4, est contractile par déformation sur la sphère $S^n \in l_\gamma$. T étant l'identité hors de G_ξ , $(k - \partial a) - T(k - \partial a)$ a son support dans G_ξ . Vu (28) ce cycle est donc *identique* à $m\Sigma_0 - T(m\Sigma_0)$, et ce dernier est $\sim mS^n$ selon (14).

PREUVE DE (10) DU N° 3. Soit l un générateur de $H^n(Q^n)$. Selon (11) $l - \theta(l)$ est $2l$, si n est pair, et 0, si n est impair. Or, vu (27), cette classe de cohomologie est toujours $(l, l)l$, d'où (10) du n° 3.

4. Complétons ce n° par des remarques concernant la cohomologie du cône complexe

$$(29) \quad CQ^n: z_1^2 + \dots + z_{n+1}^2 = 0 \quad (CQ^n \subset C^{n+1})$$

de l'espace affine complexe C^{n+1} . Nous avons alors

$$(30) \quad H^p(CQ^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n, n+1, 2n \\ A, & \text{si } p = n, n+1, 2n \end{cases} \quad n \text{ est IMPAIR, } \geq 3$$

$$(31) \quad H^p(CQ^n) = \begin{cases} 0, & \text{si } p \neq n+1, 2n \\ A/2A & \text{si } p = n+1 \\ A & \text{si } p = 2n \end{cases} \quad n \text{ est PAIR, } \geq 2.$$

CQ^1 est un cône quadratique réel; c'est un cas exceptionnel, car $H^2(CQ^1) = A + A$. Pour prouver ces relations on écrit la suite exacte des espaces C^{n+1} , CQ^n , $C^{n+1} -$

CQ^n , et on remarque que le dernier est un espace fibré, dont la fibre est Q^n , et dont la base est $C - \{0\}$; le Corollaire 1 donne l'opération du groupe fondamental de la base dans la cohomologie de la fibre. Cette détermination donne en outre (13), (14) du n° 3.

Nous n'avons pas besoin d'étudier directement les résultats analogues concernant la cohomologie des quadriques complexes de P^n , car ces résultats sont des cas particuliers du Théorème 2 du n° 4. (Cf. É. Cartan [1], dont les résultats sont valables en cohomologie entière; ce travail donne une base d'homologie des quadriques de P^n ; v. aussi van der Waerden [1], N. B. (8), (9) du n° 3 sont également des cas particuliers des résultats du n° 4, mais dans la preuve de ces derniers nous devons connaître la cohomologie des quadriques affines.)

7. Constructions géométriques

Dans le présent n° nous prouvons les Propositions 1-5 du n° 1, et nous en déduisons quelques corollaires, qui seront utilisés dans le Chapitre 3.

1. Si X est une variété analytique complexe de dimension complexe n , nous disons "métrique riemannienne de X " au lieu de dire métrique riemannienne de classe C^∞ de X compatible avec sa structure analytique. (En ce qui concerne la construction et le prolongement des métriques riemanniennes v., par exemple, de Rham [1], Seifert et Threlfall [1], Steenrod [1].) Étant donné une métrique riemannienne de X , nous désignons par $D(x, \rho)$ la réunion des segments géodésiques de X , issus de $x \in X$, de longueur ρ , qui sont orthogonaux à un $2n - 2$ élément plan donné; $D(x, \rho)$ sera appelé disque géodésique de X , car il est homéomorphe à un disque plan, si ρ est assez petit.

Utilisons à présent les notations (1)-(4) du n° 1; supposons que f satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° cité.

Donnons nous arbitrairement un $\xi \in C$, et le voisinage de l'infini U_∞ de F_ξ dans X , qui figure dans l'Hypothèse 2 du n° 1. Nous pouvons supposer que U_∞ est ouvert, $D = f(U_\infty)$ est un disque ouvert centré à ξ , et que U_∞ ne contient pas de point d -critique de f . Dans ces conditions $F_\xi \cap U_\infty$ est une variété analytique complexe; munissons la d'une métrique riemannienne. Or, $U_\infty \approx D \times (F_\xi \cap U_\infty)$, nous pouvons donc prolonger la métrique riemannienne de $F_\xi \cap U_\infty$ en une métrique riemannienne de U_∞ , telle que les rayons des disques $D \times x$, $x \in (F_\xi \cap U_\infty)$, soient des segments géodésiques dans la métrique riemannienne en question.

PREUVE DE LA PROPOSITION 1 DU N° 1. Donnons nous $\xi \in C - \Gamma$, et utilisons le voisinage de l'infini U_∞ de F_ξ dans X . Nous avons ci-dessus construit une métrique riemannienne dans U_∞ ; prolongeons la en une métrique riemannienne de tout X . F_ξ est à présent une variété. Comme $F_\xi - U_\infty$ est une partie compacte de cette variété, il existe un $\sigma > 0$, tel que les disques géodésiques $D(x, \sigma)$, $x \in F_\xi - U_\infty$, orthogonaux à $F_\xi - U_\infty$, rencontrent tout F_ξ en un point au plus (v. Seifert et Threlfall [1], §9, p. 37). Nous pouvons choisir σ si petit que $f(D(x, \sigma)) \subset f(U_\infty)$ pour tout $x \in F_\xi - U_\infty$. Cela étant, il existe un disque $D' \subset C$ centré à ξ , tel

que $U' = f^{-1}(D')$ est le produit de D' et de $F_\xi, f|U'$ étant une projection de ce produit. Cela complète la preuve de la Proposition 1 du n° 1.

PREUVE DE LA PROPOSITION 3 DU N° 1. La construction sera analogue à celle de la preuve précédent. Nous nous donnons $\gamma \in \Gamma$, et la boule fermée B de (9) du n° 1. Nous désignons par U_∞ le voisinage de l'infini de F_γ dans X , qui figure dans l'Hypothèse 2 du n° 1, et nous la munissons de la métrique riemannienne ci-dessus construite. Nous choisissons une métrique riemannienne dans une boule $B' \supset B$ de X , telle que, si $\dot{B}$ désigne la frontière de B , les segments géodésiques de longueur $\rho > 0$ issus de $x \in \dot{B} \cap F_\gamma$ et orthogonaux à F_γ soient contenus dans $\dot{B}$. Cela étant, nous pouvons choisir une métrique riemannienne de X , qui prolonge la métrique donnée dans U_∞ , et celle donnée dans B' , car nous pouvons supposer $B' \cap U_\infty = \emptyset$. $F_\gamma - (U_\infty \cup B)$ est une variété dans X . Nous pouvons donc choisir $\rho(>0)$ assez petit pour que les disques géodésiques $D(x, \rho)$, $x \in (F_\gamma - (U_\infty \cup B))$ orthogonaux à $(F_\gamma - (U_\infty \cup B))$ coupent F_ξ en un point au plus. Cela étant on trouve le disque D de C centré à γ , tel que le U de (10) du n° 1 ait la propriété suivante: si $\zeta \in D$, et $x \in F_\gamma - B$, le disque géodésique $D(x, \rho)$ orthogonal à $F_\gamma - B$ coupe F_ξ en un point bien déterminé variant continûment avec (ζ, x) . $U - B$ est donc un produit ayant les propriétés formulées dans la Proposition 3 du n° 1. Il est donc évident que $U - B$ peut être rétracté par déformation sur tout $F_\xi - B$, $\zeta \in D$, d'où la proposition suivante:

PROPOSITION 1. *Utilisons les notations de la Proposition 3 du n° 1. $U - B$ peut être rétracté par déformation sur $F_\xi - B$ quel que soit $\zeta \in D$.*

PREUVE DE LA PROPOSITION 4 DE N° 1. Si $\zeta = \gamma$ dans la proposition ci-dessus, la rétraction en question peut être prolongée à l'intérieur de $U \cap B$; cela est impossible, si $\zeta \neq \gamma$. Pour prouver notre affirmation nous allons construire des arcs différentiables R_x issus des points $x \in F_\gamma$, qui permettent de définir cette rétraction. Pour $x \neq c$ l'arc R_x sera unique, et il y aura plusieurs arcs R_c aboutissant à c .

Si R est un rayon de D , et $x \in B \cap F_\gamma$, $x \neq c$, il existe un arc différentiable R_x dans X issu de x , qui coupe F_ξ orthogonalement en un seul point, quand ζ décrit R . R_x dépend continûment de R et de x (cf. Seifert et Threlfall [1], §9, p. 37). Nous pouvons changer la métrique riemannienne donnée dans B au voisinage de la frontière $\dot{B}$ de B , de sorte que R_x soit un segment géodésique compris dans $\dot{B}$, quand $x \in F_\gamma \cap \dot{B}$, et R est arbitraire. Si $y \in B$, $y \notin F_\gamma$, et R est le rayon de D passant par $f(y)$, il existe également un arc différentiable R_y passant par y , et coupant orthogonalement tout F_ξ , $\zeta \in R$, $\zeta \neq \gamma$, en un seul point. R_y est ou bien un R_x ci-dessus envisagé ou bien il aboutit à c (ce point est l'adhérence sur F_γ de l'arc semi-ouvert R_y); dans ce dernier cas nous notons l'arc R_c .

Si $x \in F_\gamma - B$, il existe un disque géodésique $D \times x$ passant par x (cf. la preuve précédente), dont les rayons seront notés R_x . Quand x converge vers $\dot{B}$, ces arcs convergent vers les R_x ci-dessus construits dans $\dot{B}$, vu le choix de la métrique dans le voisinage de $\dot{B}$.

L'ensemble des arcs R_x ainsi construits permet de définir la rétraction de la Proposition 4 du n° 1 dans le cas, où ζ de la proposition $\in \Gamma$. Si $\zeta \notin \Gamma$, l'affirmation de la Proposition 4 du n° 1 découle de la Proposition 1 du n° 1. Cela complète la preuve.

2. Dans ce qui suit nous préparons la preuve de la dernière proposition du n° 1.

Soit W^n une variété algébrique sans singularités dans P^t . Nous fixons une fois pour toute une métrique riemannienne dans P^t , et nous parlerons de la métrique complète induite dans W^n . Soient donnés:

$$(1) \quad \text{une série linéaire } \{W_\xi^{n-1}\} \text{ sur } W^n$$

$$(2) \quad W^{n-2} = \bigcap_\xi W_\xi^{n-1}.$$

LEMME 1. Soit W_ζ^{n-1} un élément donné de la série linéaire (1); supposons que sa variété de singularités est hors de W^{n-2} . Il existe un voisinage U_∞ de W^{n-2} dans W^n , et un nombre réel $\rho > 0$, tels que, si $x \in U_\infty \cap W_\zeta^{n-1}$, et le disque géodésique $D(x, \rho)$ de W^n est orthogonal à W_ζ^{n-1} , alors

$$(3) \quad D(x, \rho) \cap W_\xi^{n-1}$$

contient un point au plus quel que soit ξ dans un voisinage D de ζ .

PREUVE. Comme la variété de singularités de W_ζ^{n-1} ne coupe pas W^{n-2} , il existe un voisinage D' de ζ , tel que les variétés de singularités de W_ξ^{n-1} , $\xi \in D'$, ne coupent pas W^{n-2} . Les fonctions de courbures des variétés W_ξ^{n-1} , $\xi \in D'$, sont donc définies dans un voisinage U_∞ de W^{n-2} . Il existe par conséquent un $\rho(>0)$ ayant les propriétés suivantes: si un segment géodésique coupe W_ξ^{n-1} , $\xi \in D'$, en un point de U_∞ sous un angle entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$, alors ce point d'intersection est nécessairement unique. Cela posé, il suffit de prendre un disque D dans D' , tel que tout disque géodésique $D(x, \rho)$ orthogonal à W_ζ^{n-1} en x , coupe W_ξ^{n-1} , $\xi \in D$, en un angle entre $\frac{1}{4}\pi$ et $\frac{3}{4}\pi$. Ces données auront alors les propriétés formulées dans le lemme, dont la preuve est donc complète.

LEMME 2. Soit W^n une variété algébrique sans singularités dans P^t ; supposons P_∞^{t-1} tel que $W^{n-1} = W^n \cap P_\infty^{t-1}$ soit dépourvu de singularités. Il existe une série linéaire d'hyperplans $\{P_\xi^{t-1}\} = \{P_\xi\}$, dont la base sera notée P^{t-2} , telle que: 1° il existe un ensemble fini Γ de nombres complexes ξ , tel que

$$(4) \quad \text{si } \xi \notin \Gamma, P_\xi \cap W^n \text{ est dépourvu de singularités;}$$

$$(5) \quad \text{si } \gamma \in \Gamma, P_\gamma \cap W^n \text{ possède un seul point double;}$$

$$2^\circ W^{n-2} = P_\infty^{t-2} \cap W^n \text{ n'a pas de singularités; } 3^\circ P^{t-2} \subset P_\infty^{t-1}.$$

PREUVE. Soit P_* le dual de P^t : les hyperplans de P^t , et les points x_* de P_*^t sont en correspondance biunivoque et linéaire. L'ensemble des hyperplans de P^t contenant une variété linéaire $P^n \subset P^t$ tangente à W^n constituent une variété algébrique W_* de P_*^t . W_* ne peut pas être tout P_*^t , car W^n n'a pas de singularités. Si la dimension de W_* est $< t - 1$, il existe une droite P_*^1 passant par le point, qui correspond à P_∞^{t-1} , qui ne rencontre pas W_* . D'où une série linéaire d'hyperplans dans P^t , telle que ses éléments coupent W^n suivant des variétés dépourvues de singularités. Les conditions du lemme sont alors satisfaites. Supposons à présent que la dimension complexe de W_* est $t - 1$. Choisissons une droite P_*^1 de P_*^t , qui passe par le point correspondant à P_∞^{t-1} , et qui évite la variété de singularités de W_* , et coupe cette variété en un nombre fini de points. Or, à tout point simple de W_* correspond un hyperplan de P^t , qui est tangent à W^n ,

le point de contact correspondant à l'hyperplan tangent de W_* ; d'où l'unicité du point de contact sur W^n . Cela prouve que la série d'hyperplans $\{P_\xi\}$ de P^t , qui correspond à P_*^1 par dualité, a les propriétés énumérées dans le lemme, dont la preuve est ainsi complète.

PREUVE DE LA PROPOSITION 5 DU N° 1. Soit donné V^n de la proposition en question, et notons W^n la variété algébrique de P^t , dont la partie affine est V^n . Déterminons la série linéaire d'hyperplans selon le Lemme 2: la partie affine de ces hyperplans sera une série d'hyperplans parallèles dans C^t ; notons la par $\{C_\xi^{t-1}\}$. A tout point $x \in V^n$ faisons correspondre le paramètre ξ de l'hyperplan C_ξ^{t-1} passant par x , et posons $\xi = f(x)$. Selon (4), (5) f aura un nombre fini de points d -critiques, puisque $f^{-1}(\xi) = C_\xi^{t-1} \cap V^n$. Cela prouve que f satisfait à l'Hypothèse 1 du n° 1. Le Lemme 1 prouve ensuite que notre fonction f a également la propriété formulée dans l'Hypothèse 2 du n° 1. Cela achève la preuve de la Proposition 5 du n° 1.

Le Lemme 1 donne immédiatement la

PROPOSITION 2. *La fonction f_i de (3) du n° 4 satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° 1.*

CHAPITRE 3. MODULES CRITIQUES DES FONCTIONS HOLOMORPHES DU N° 1

Dans ce paragraphe nous utilisons les notations (1)–(4) du n° 1: f est une fonction holomorphe définie dans X satisfaisant aux Hypothèses 1, 2 du n° 1.

8. Définition des modules critiques

Si ξ n'est pas une valeur d -critique de f , il existe un isomorphisme naturel $H(F_\gamma) \approx H(F_\xi)$, pourvu que η soit suffisamment près de ξ . A présent nous allons étudier l'homomorphisme

$$(1) \quad H(F_\gamma) \rightarrow H(F_\xi) \quad (\xi \text{ près de } \gamma),$$

dont nous avons déjà parlé dans l'Introduction et dans le n° 1.

Soit D un disque FERMÉ dans le plan C centré à $\gamma \in \Gamma$, et contenant cette valeur d -critique seulement. Posons

$$(2) \quad U = f^{-1}(D) \quad (U: \text{voisinage FERMÉ de } F_\gamma).$$

Si D est suffisamment petit, la section $H(U) \rightarrow H(F_\gamma)$ établit un isomorphisme

$$(3) \quad H(U) \approx H(F_\gamma)$$

selon la Proposition 4 du n° 1 (U est rétractile par déformation sur F_γ). Envisageons à présent la section

$$(4) \quad H(U) \rightarrow H(F_\xi) \quad (\xi \in D).$$

PROPOSITION 1. *Désignons par $N(U)$ le noyau de l'homomorphisme (4), et posons*

$$(5) \quad N(\gamma) = \{\text{image de } N(U) \text{ par l'isomorphisme (3)}\};$$

soit $N^p(\gamma) = N(\gamma) \cap H^p(F_\gamma)$. L'algèbre $N(\gamma)$ est indépendant du choix de D dans (2), et de $\xi \in D$.

PREUVE. Fixons d'abord U , et soient F_ξ, F_η arbitrairement donnés dans U . Désignons par α un arc de Jordan dans $D = f(U)$ reliant ξ à η , et évitant γ . Posons $J = f^{-1}(\alpha)$. Alors F_ξ et F_η sont des rétracts par déformation de J . Le diagramme

$$\begin{array}{ccc} & & H(F_\xi) \\ & \nearrow & \\ H(U) & \rightarrow & H(J) \\ & \searrow & \\ & & H(F_\eta) \end{array}$$

prouve que le noyau de (4) ne dépend pas de ξ ; en particulier, ce noyau peut être noté $N(U)$.

Soient D_1, D_2 deux voisinages fermés rétractiles de γ dans C , dont l'intersection $D = D_1 \cap D_2$ est également rétractile. Nous écrivons $U_i = f^{-1}(D_i)$, $i = 1, 2$, et $U = f^{-1}(D)$; nous choisissons ξ dans D . Le diagramme

$$\begin{array}{ccccc} & & H(U_1) & & \\ & \swarrow & & \searrow & \\ H(F_\gamma) & & & & H(U) \rightarrow H(F_\xi) \\ & \nwarrow & & \nearrow & \\ & & H(U_2) & & \end{array}$$

montre $N(U_1) = N(U_2)$. Cela termine la preuve de la proposition.

PROPOSITION 2. Notons par I_ξ l'image de la section (4). Ce sous-module de $H(F_\xi)$ est indépendant du choix de U dans (2), pourvu que $U \supset F_\xi$.

PREUVE. Utilisons les notations de la preuve précédente. La section (4) applique isomorphiquement $H(U)/N(U)$ sur I_ξ . Nous avons donc un isomorphisme $H(F_\gamma)/N(\gamma) \approx I_\xi$ établi par les sections des algèbres de cohomologie. La Proposition 1 implique donc la Proposition 2.

Les résultats précédents justifient la définition que voici:

DÉFINITION 1. L'homomorphisme (1) est par définition le produit de l'isomorphisme (3) et de la section (4). Son noyau $N(\gamma)$ est appelé premier module critique de γ (cf. (5)). Son conoyau

$$Q_\xi(\gamma) = H(F_\xi)/I_\xi$$

est dit second module critique de γ .

NOTES. 1. $N(\gamma)$ est un idéal de $H(F_\gamma)$, il est donc une algèbre. $Q_\xi(\gamma)$ est un quotient de $H(F_\xi)$ par un sous-module, et il ne possède pas de multiplication. 2. Soit D un disque centré à γ et ne contenant pas d'autres valeurs d -critiques. Si $\xi, \eta \in D$, $Q_\xi(\gamma)$ et $Q_\eta(\gamma)$ sont isomorphes, mais cet isomorphisme n'est pas déterminé, car le groupe fondamental de $D - \gamma$ peut opérer dans $Q_\xi(\gamma)$.

DÉFINITION 2. Soit c un point d -critique de f . Notons par C^n l'espace tangent de X au point c . f induit une application $a: C^n \rightarrow C$ de l'espace tangent sur le plan de Cauchy; elle est donnée par le polynôme homogène a figurant dans le second membre de (6) du n° 1. L'application a a une seule valeur critique 0. Ses modules critiques $\bar{N}(\gamma)$, $\bar{Q}(\gamma)$ sont appelés modules critiques du point d -critique c de f .

9. Relations entre les modules critiques de γ et ceux du point critique $c \in F_\gamma$

Nous utilisons les mêmes notations que dans le n° précédent, et pour simplifier l'écriture nous posons

$$(1) \quad G_\xi = F_\xi \cap B \quad (G_\xi : \text{COMPACT})$$

où ξ varie dans un voisinage $D \subset f(B)$ de γ , et B est la boule COMPACTE centrée à c dans X , qui figure dans la Proposition 3 du n° 1.

LEMME 1. Notons par H^+ l'idéal des éléments de degré ≥ 1 d'une algèbre de cohomologie H . Soit d l'homomorphisme de cobord

$$(2) \quad d: H(G_\xi) \rightarrow H(F_\xi - G_\xi).$$

On a alors

$$(3) \quad N(\gamma) \approx dH^+(G_\xi)$$

si $|\xi - \gamma|$ est suffisamment petit (et $\neq 0$). En particulier, les éléments de $N(\gamma)$ sont de degré ≥ 2 .

LEMME 2. On a:

$$(4) \quad Q_\xi(\gamma) = G_\xi H(F_\xi) = \{\text{image de la section } H(F_\xi) \rightarrow H(G_\xi)\}.$$

Si F_ξ n'a pas de composant connexe compact, les éléments de $Q_\xi(\gamma)$ sont donc de degré ≥ 1 .

Ces lemmes permettent d'estimer les modules critiques de γ en fonction de $H(G_\xi)$. Cette dernière algèbre de cohomologie est connue, si l'on connaît la restriction de f à un voisinage arbitrairement petit du point d -critique c . De façon précise on a le résultat suivant (cf. Définition 2 du n° 8):

THÉORÈME 1. Le module critique $N(\gamma)$ de la valeur critique γ est un quotient du module critique $\tilde{N}(\gamma)$ du point critique $c \in F_\gamma$. Si l'anneau des coefficients est un corps, le module critique $Q_\xi(\gamma)$ de γ est en dualité séparante avec un sous-espace vectoriel de $\tilde{Q}_\xi(\gamma)$ attaché au point critique $c \in F_\gamma$.

COROLLAIRE 1. Soit $\dim X = 2n \geq 2$.

$$(5) \quad H^p(G_\xi)/Q_\xi^p(\gamma) \approx N^{p+1}(\gamma).$$

De façon précise: l'homomorphisme de cobord (2) applique le premier membre de (5) isomorphiquement sur le second membre.

COROLLAIRE 2. $Q_\xi^p(\gamma) = H^p(G_\xi)$ équivaut $N^{p+1}(\gamma) = 0$, $p \geq 1$.

Ces résultats seront prouvés dans le n° suivant; nous y explicitons l'isomorphisme (3). Envisageons à présent le triangle exact (cf. Fáy [4], p. 120, (13); Fáy [5], n° 5, (22)):

$$(6) \quad \begin{array}{ccc} H(F_\xi) & \longrightarrow & H(G_\xi) \\ & \nwarrow & \swarrow d \\ & H(F_\xi - G_\xi) & \end{array}$$

Le Lemme 2 équivaut donc à chacune des deux relations que voici :

$$(7) \quad Q_{\xi}^p(\gamma) = \{\text{noyau du cobord } d: H^p(G_{\xi}) \rightarrow H^{p+1}(F_{\xi} - G_{\xi})\},$$

$$(8) \quad I_{\xi}^p = \{\text{image de l'injection } H^p(F_{\xi} - G_{\xi}) \rightarrow H^p(F_{\xi})\}.$$

Écrivons quatre termes consécutifs de (6)

$$(9) \quad \begin{array}{ccccccc} H^p(F_{\xi}) & \xrightarrow{s} & H^p(G_{\xi}) & \xrightarrow{d} & H^{p+1}(F_{\xi} - G_{\xi}) & \xrightarrow{i} & H^{p+1}(F_{\xi}) \\ & & Q_{\xi}^p(\gamma) & & N^{p+1}(\gamma) & & \end{array}$$

D'après le Lemme 2 $Q_{\xi}^p(\gamma)$ est l'image de s , ou, ce qui revient au même, il est le noyau de d . De même $N^{p+1}(\gamma)$ est l'image de d , ou le noyau de i (à une isomorphie près). Ces remarques montrent que les lemmes impliquent les Corollaires 1, 2.

10. Preuve des lemmes du n° 9

Ces lemmes peuvent être obtenus par deux voies différentes. Pour les illustrer nous donnerons deux preuves du Lemme 1: la première (A) opère directement avec les éléments d'une couverture fine de X ; la seconde (B) raisonne sur les algèbres de cohomologie des espaces envisagés, et elle peut être interprétée en toute théorie de cohomologie au sens d'Eilenberg et Steenrod.

PREUVE DU LEMME 1 DU N° 9. A. Nous fixons dans cette démonstration une A-couverture fine $[K]$ de X (cf. Fáy [5], n° 5); les sections de $[K]$ par les sous-espaces fermés de X seront des couvertures fines de ces espaces.

Nous voulons établir l'isomorphisme (3) du n° 9. Notons J l'image de d du triangle (6) du n° 9: $J = dH(G_{\xi})$, $J \subset H(F_{\xi} - G_{\xi})$.

1° Nous allons construire un homomorphisme $N(\gamma) \rightarrow J$. Un élément de $N(\gamma)$ est représenté par un $k \in K$, tel que Uk soit un cocycle, et que

$$(1) \quad F_{\xi}k = d(F_{\xi}a) \quad (a \in K).$$

$B \cap U$ étant contractile sur le point critique c , on peut supposer que

$$(2) \quad S(k) \cap B = \emptyset,$$

où $S(k)$ est le support de k . (En effet, $Bk \sim 0$ implique qu'il existe un cocycle dans la classe de Uk , tel que (2) soit valable.) Or, (2) montre que $G_{\xi}a$ est un cocycle, et selon (1) l'image de sa classe de cohomologie par le d de (6) du n° 9 est précisément la classe de cohomologie de $F_{\xi}Uk = F_{\xi}k$. Cette construction fait donc correspondre à tout élément de $N(\gamma)$ un élément de $J = dH^+(G_{\xi})$.

2° Construisons un homomorphisme $J \rightarrow N(\gamma)$. Étant donné $h \in J$, on peut trouver des éléments k' , $a' \in K$, tels que $F_{\xi}k'$ soit un cocycle de la classe h ,

$$(3) \quad S(F_{\xi}k') \subset F_{\xi} - G_{\xi}, \quad \text{et} \quad F_{\xi}k' = d(F_{\xi}a').$$

Or, si $|\gamma - \xi|$ est assez petit, $U - B$ peut être rétracté par déformation sur $F_{\xi} - G_{\xi}$ selon la Proposition 1 du n° 7. Il existe donc un $k \in K$, tel que Uk soit un cocycle, et que $F_{\xi}k = F_{\xi}k' + d(F_{\xi}b)$, où $b \in K$ est convenablement choisi.

En posant $a = a' + b$, nous aurons (1) pour k , et cela signifie que la classe de $F_\gamma k = F_\gamma U k$ appartient à $N(\gamma)$.

Dans 1° nous avons construit une application $N(\gamma) \rightarrow J$, et dans 2° une application $J \rightarrow N(\gamma)$. Selon la construction, la composée de ces applications est l'identité de $N(\gamma)$. La preuve du Lemme 1 du n° 9 est donc complète.

B. Nous donnons à présent une démonstration du même lemme, en utilisant directement les algèbres de cohomologie.

Explicitons d'abord l'isomorphisme (3) du n° 9. Envisageons le tableau d'homomorphismes que voici:

$$(4) \quad \begin{array}{ccccccc} N(\gamma) & \xrightarrow{j} & H(F_\gamma) & \xleftarrow{r} & H(U) & \xleftarrow{i} & H(U - B) \\ & & & & & & \xrightarrow{s} H(F_\xi - G_\xi) \xrightarrow{d} H^+(G_\xi). \end{array}$$

Dans (4) j est l'injection de l'idéal $N(\gamma)$ dans $H(F_\gamma)$, r et s sont des sections, i provient de l'inclusion $U - B \subset U$, et d est le cobord d'une suite exacte. F_γ étant un rétracte par déformation de U , r est un isomorphisme. De même, $F_\xi - G_\xi$ étant un rétracte par déformation de $U - B$ (Proposition 1 du n° 7), s est également un isomorphisme. Pour les modules des éléments de degré ≥ 2 des cinq premières algèbres on peut ainsi former l'homomorphisme

$$(5) \quad g = si^{-1}r^{-1}j.$$

Nous allons montrer: *le noyau de g est nul, et*

$$(6) \quad gN(\gamma) = dH^+(G_\xi).$$

Il est d'abord évident que le noyau de g est nul, puisque s et j ont un noyau nul. Posons $J = dH^+(G_\xi)$.

1° $gN(\gamma) \subset J$. Donnons nous une classe $h \in N(\gamma)$, et démontrons que $gh = dk$, où k est un élément convenablement choisi de $H^+(G_\xi)$.

Comme le degré de h est ≥ 2 , $Bh = 0$, car B est une boule compacte. On a donc $h = il'$, où $h' \in H(U - B)$. Or, $F_\xi - G_\xi$ est un rétracte par déformation de $U - B$, il existe un $h'' \in H(F_\xi - G_\xi)$ tel que $h' = s^{-1}(h'')$. Selon l'hypothèse $F_\xi h = 0$. Par conséquent l'image de h'' par $H(F_\xi - G_\xi) \rightarrow H(F_\xi)$ est nulle. Ainsi $h'' = dk$, où $k \in H^+(G_\xi)$. Cela prouve l'inclusion énoncée.

2° $J \subset gN(\gamma)$. Soit $h' \in H(F_\xi - G_\xi)$, tel que $h' = dk$, où $k \in H^+(G_\xi)$. L'image de h' par l'injection $H(F_\xi - G_\xi) \rightarrow H(F_\xi)$ étant nulle (triangle exact (6) du n° 9), la rétraction de $U - B$ sur $F_\xi - G_\xi$ définit un $h'' \in H(U - B)$, tel que $h'' = s^{-1}(h')$. $jr^{-1}(h'') \in N(\gamma)$, et cela prouve l'inclusion $J \subset N(\gamma)$. La seconde démonstration du Lemme 1 du n° 9 est donc complète.

PREUVE DU LEMME 2 DU N° 9. Dans le n° précédent nous avons déjà remarqué qu'il suffit d'établir l'équation (8) du n° 9. Notons J le second membre de l'équation citée.

1° $I_\xi \subset J$. Donnons nous une classe de cohomologie $h_\xi \in H(F_\xi)$, qui vient d'une classe $h \in H(U)$: $h_\xi = F_\xi h$. Nous pouvons supposer h de degré ≥ 1 . Si $p \geq 1$, $H^p(B \cap U) = 0$, ainsi h est l'image par l'injection d'une classe $k \in H(U - B)$.

Or, $F_\xi - G_\xi$ est une rétracte par déformation de $U - B$ (Proposition 1 du n° 7), k vient donc d'une classe de cohomologie par cette rétraction, qui est précisément h . Cela prouve $h \in J$.

2° $J \subset I_\xi$. Soit $h_\xi \in H(F_\xi)$ une classe de J : $h_\xi = ih'_\xi$, $h'_\xi \in H(F_\xi - G_\xi)$. $F_\xi - G_\xi$ étant un rétracte par déformation de $U - B$, l'image de h' par l'homomorphisme qu'induit cette rétraction est un $h' \in H(U - B)$, dont l'image par l'injection dans $H(U)$ sera notée h . Selon cette construction il est évident que $h_\xi = F_\xi h$, ce qui prouve $h \in I_\xi$. La preuve du Lemme 2 du n° 9 est donc complète.

PREUVE DU THÉORÈME 1 DU N° 9. Prouvons d'abord que $N(\gamma)$ est un quotient de $\bar{N}(\gamma)$. Notons B^0 l'intérieur de B dans X ; B^0 est donc une boule ouverte. Soit donné $h \in H(F_\gamma)$, et supposons $(F_\gamma - B^0)h \neq 0$. Nous montrerons que dans ce cas $h \notin N(\gamma)$. En effet, $h = F_\gamma \bar{h}$, où $\bar{h} \in H(U)$. Comme $F_\gamma - B^0$ est rétracte par déformation de $U - B^0$, on aura $(U - B^0)h \neq 0$. Or, $F_\xi - B^0$ est également un rétracte par déformation de $U - B^0$ (Proposition 1 du n° 7), donc $(F_\xi - B^0)\bar{h} \neq 0$, et a fortiori $F_\xi \bar{h} \neq 0$, ce qui prouve que $h \notin N(\gamma)$. Autrement formulé nous avons obtenu que $N(\gamma)$ est un sous-module de l'image de

$$(7) \quad H(F_\gamma \cap B^0) \rightarrow H(F_\gamma).$$

Envisageons le cône $CV(\gamma)$ de (8) du n° 2: $CV(\gamma) \cap B^0 = F_\gamma \cap B^0$. Or, une homothétie de l'espace affine C^n contenant $CV(\gamma)$ montre que $CV(\gamma) \cap B^0$ et $CV(\gamma)$ sont homéomorphes. On a donc une application naturelle

$$(8) \quad \bar{N}(\gamma) \rightarrow N(\gamma)$$

selon la définition même de ces invariants; (7) prouve que (8) applique la première algèbre *sur* la seconde. Cela termine la preuve de la première affirmation du Théorème 1 du n° 9.

Dans la suite nous n'utilisons pas la seconde affirmation de ce théorème, nous en donnerons donc une preuve sommaire seulement. $F_\xi \cap B$ (compact) est une variété à bord $F_\xi \cap \dot{B}$ ($\dot{B} = B - B^0$); $H(F_\xi \cap B)$ et $H(F_\xi \cap B^0)$ sont donc des espaces vectoriels duaux (Lefschetz [3], p. 203, (33.2) (c)). Or, $Q_\xi(\gamma)$ est un sous-module de $H(F_\xi \cap B)$ selon le Lemme 2 du n° 9, d'où la seconde affirmation du Théorème 1 du n° 9.

PREUVE DE (24)–(31), (35), (36) DU N° 2. Supposons que les points d -critiques de f sont quadratiques non dégénérés. Selon le Lemme 2 du n° 6 $H^p(G_\xi) = 0$ pour $p \neq n - 1$, et $H^{n-1}(G_\xi) = A$. Grâce à (3), (4), (5) du n° 9 (cf. aussi la suite exacte (9) du n° 9) les relations (24)–(30) du n° 2 en découlent immédiatement. Si A est un corps de caractéristique $\neq 2$, et n est *impaire*, (31) du n° 6, et la première partie du Théorème 1 du n° 9 prouvent $N(\gamma) = 0$ pour tout γ . Cela complète la preuve de (24)–(31), et (35), (36) du n° 2.

11. Module de Lefschetz $L \subset H(F)$

Dans les n°s précédents nous avons envisagé le module critique $Q_\xi(\gamma)$ constitué des classes d'éléments de $H(F_\xi)$, dont tout cocycle rencontre un voisinage du point critique $c \in F_\gamma$ dans X (si ξ est près de γ). A présent nous allons envisager

certaines classes de $H(F_\xi)$ possédant des cocycles, dont le support converge vers $c \in F_\gamma$, quand ξ approche γ . (Cf. Fáy [2], Théorème 4.) Parmi ces classes nous allons envisager celles, qui donnent l'opération de $\pi_1(C - \Gamma, \xi)$ dans $H(F_\xi)$.

PROPOSITION 1. Soient L_i , $i = 1, 2$ des sous-modules de $H(F_\xi)$, tels que: 1° $\theta L_i = L_i$, $i = 1, 2$, quel que soit $\theta \in \pi_1(C - \Gamma, \xi)$; 2° $\theta h \equiv h \pmod{L_i}$, pour tout $h \in H(F_\xi)$ ($i = 1, 2$). Dans ces conditions $L_1 \cap L_2$ possède ces mêmes propriétés.

PREUVE. $\theta(L_1 \cap L_2) = L_1 \cap L_2$ est évident. Si $h \in L_1 \cap L_2$, la condition 2° implique $h - \theta h \in L_1$, de même $h - \theta h \in L_2$, D'où $h - \theta h \in L_1 \cap L_2$, ce qui complète la preuve de la proposition.

Vu la proposition ci-dessus, nous pouvons poser la

DÉFINITION 1. Nous notons L_ξ et nous appelons module de Lefschetz (de f) le plus petit sous-module de $H(F_\xi)$, tel que tout $\theta \in \pi_1(C - \Gamma, \xi)$ conserve L_ξ , et est l'identité sur le quotient $H(F_\xi)/L_\xi$.

NOTES 1. Un chemin de $C - \Gamma$ reliant ξ et η définit un isomorphisme

$$(1) \quad H(F_\xi)/L_\xi \approx H(F_\eta)/L_\eta.$$

Cet isomorphisme étant indépendant du chemin, nous pouvons simplifier les notations en écrivant (12) du n° 2: $H(F)/L \approx H(F_\xi)/L_\xi$. 2. Le Théorème 1 du n° 6 clarifie la structure de L dans le cas, où les points d -critiques sont quadratique non dégénérés, d'où le nom de ce module.

Soit κ_γ un cercle dans le plan C centré à $\gamma \in \Gamma$ et ne contenant pas d'autres points de Γ dans son intérieur. Soit $\eta \in \kappa_\gamma$, et notons $\xi\eta$ le segment orienté d'extrémités ξ, η . $\xi\eta \cup \kappa_\gamma \cup \eta\xi$ est une courbe fermée d'origine ξ , dont la classe d'homotopie dans $C - \Gamma$ sera noté θ_γ , et appelé générateur de $\pi_1(C - \Gamma, \xi)$ attaché à γ .

PROPOSITION 2. Le module de Lefschetz L_ξ est engendré par les classes de la forme $h - \theta_\gamma h$:

$$(2) \quad L_\xi = \{k: k \in H(F_\xi), k = \sum_{\gamma \in \Gamma} (h - \theta_\gamma h), h \in H(F_\xi)\}$$

où θ_γ est le générateur de $\pi_1(C - \Gamma, \xi)$ attaché au point $\gamma \in \Gamma$.

PREUVE. Notons provisoirement L' le second membre de (2.) On constate facilement que L' possède les propriétés 1°, 2° de la Proposition 1. De plus, L' ne possède aucun sous-module ayant ces propriétés, d'où l'affirmation $L' = L_\xi$, vu la Proposition 1.

PREUVE DE (23) DU COMPLÉMENT 4 DU N° 2. Utilisons les notations de l'énoncé en question. Notons B_γ^0 l'intérieur dans X de la boule compacte B de (9) du n° 1, centrée à $c \in F_\gamma$; B^0 est donc une boule ouverte. Fixons $\gamma \in \Gamma$ et montrons: si $h \in H(F_\gamma)$, où $|\eta - \gamma|$ est assez petit et $\neq 0$, alors $(F_\eta - B_\gamma^0)h \neq 0$ implique $h - \theta_\gamma h = 0$, où θ_γ est cette fois-ci la classe d'homotopie dans $C - \Gamma$ d'un petit cercle centré à γ dans C . En effet, $U - B^0$ peut être rétracté par déformation sur $F_\eta - B_\gamma^0$ (U étant le voisinage de F_γ de la Proposition 1 du n° 7), d'où l'affirmation. Cela posé, soit

$$J_\eta(\gamma) = \{\text{image de l'injection } H(F_\eta \cap B_\gamma^0) \rightarrow H(F_\eta)\}$$

où $|\eta - \gamma|$ est assez petit et $\neq 0$. Relions η par un chemin à ξ , ξ étant le point

de C , qui figure dans le Complément 4 du n° 2, et notons $J(\gamma)$ l'image de $J_\eta(\gamma)$ par l'isomorphie entre $H(F_\eta)$ et $H(F_\xi)$ attachée à ce chemin. Selon la Proposition 1, et grâce à la remarque précédente, nous savons que L_η est engendré par les $J(\gamma)$, $\gamma \in \Gamma$.

Cela posé, notons que $F_\eta \cap B_\gamma^0$ est homéomorphe à $V_\xi(\gamma) \cap B^0$, où B^0 est une boule ouverte centrée à l'origine de C^n (espace tangent de X au point $c \in F_\gamma$), et où $\xi = \eta - \gamma$. Or, si $|\xi|$ est petit, $H(V_\xi(\gamma) \cap B^0) \rightarrow H(V_\xi(\gamma))$ applique la première algèbre sur la seconde. Nous avons donc un homomorphisme

$$\sum_{\gamma \in \Gamma} H(V_\xi(\gamma)) \rightarrow L_\xi$$

qui applique le premier module sur le second, et qui dépend du choix des chemins ci-dessus considérés. Cela termine la preuve du Complément 4 du n° 2.

CHAPITRE 4. ALGÈBRE SPECTRALE DE LA FONCTION f DU N° 1

Nous allons étudier l'algèbre $\{E_r\}$ du Théorème A de l'Introduction III de Fâry [5] dans le cas, où f du théorème est la fonction (3) du n° 1. En utilisant cette algèbre spectrale, et les résultats prouvés dans les Chapitres 2 et 3, nous allons démontrer les énoncés du Chapitre 1.

12. Preuve du Théorème 1 du n° 2

Selon la Proposition 1 du n° 1 $X - F_\Gamma$ (cf. (5) du n° 1) est un espace fibré au sens de Leray ([2], p. 172). En comparant le Lemme 4.3, p. 174 de 1. c. avec le Critère 1 du n° 8 de Fâry [5], nous voyons que seuls les $\gamma \in \Gamma$ peuvent être des valeurs critiques de f . Autrement dit: le premier ensemble critique de f est inclus dans Γ . Nous disons:

$$(1) \quad \text{ou bien } N(\gamma) \neq 0, \quad \text{ou bien } Q(\gamma) \neq 0, \quad \text{pour tout } \gamma \in \Gamma.$$

En effet, $N(\gamma) = Q(\gamma) = 0$ implique selon (5) du n° 9 que

$$H^+(G_\xi) = H^+(V_\xi(\gamma) \cap B) = 0,$$

où $V_\xi(\gamma)$ est la variété affine (9) du n° 2 ($|\xi|$ étant assez petit), et B est une boule compacte centrée au sommet du cône (8) du n° 2. Or, il est connu que cette algèbre de cohomologie est $\neq 0$, ce qui prouve (1). (N.B. dans le cas, où le point d -critique de F_γ est quadratique non dégénéré (1) découle (26), (27) du n° 2 que nous avons prouvé à la fin du n° 10.) (1) implique que toutes les valeurs $\gamma \in \Gamma$ sont critiques pour f : *le premier ensemble critique de f est précisément Γ* . Comme cet ensemble contient un nombre fini d'éléments, *le second ensemble critique de f est vide*.

Cela posé, nous calculons le second terme E_2 de l'algèbre spectrale de f . Nous avons d'abord

$$(2) \quad H(\Gamma, \mathfrak{F}) = H^0(\Gamma, \mathfrak{F}) = \sum_{\gamma \in \Gamma} H(F_\gamma).$$

Envisageons les autres termes de (5) du Théorème A ci-dessus cité. $\mathfrak{F} \mid (C - \Gamma)$

est un faisceau ponctuellement constant, et $C - \Gamma$ est non compact. D'où vient

$$(3) \quad H^0(C - \Gamma, \mathfrak{F}) = 0$$

selon la Proposition 2 du n° 6 de Fáy [5]. Comme $\dim(C - \Gamma) = 2$, nous avons en outre

$$(4) \quad H^p(C - \Gamma, \mathfrak{F}) = 0, \text{ pour } p \geq 3.$$

Pour E_2 nous obtenons donc (3) du n° 2. Selon le Théorème A de l.c. nous avons les règles de degré (5), (6), du n° 2, ce qui prouve que la filtration de $H(X)$ est de la forme (1), (2) du n° 2. Notons:

$$(5) \quad -1 \leq d^\circ \text{ filtrant} \leq 2.$$

Selon les propriétés de degré des différentielles d_r (5) implique que d_r est identiquement nulle pour $r \geq 4$. D'où $\{E_r\} = \{E_2, E_3, E_4\}$, et $E_4 = GH(X)$. La preuve du Théorème 1 du n° 2 est donc complète, car les propriétés concernant la multiplication figurent déjà dans le Théorème A de l.c.

13. Autre forme de E_2 ; la différentielle d_2

Dans ce qui suit nous préparons la détermination des deux derniers termes de (3) du n° 2 (cf. Lemme 1 ci-dessous).

1. Choisissons pour tout $\gamma \in \Gamma$ une demi-droite ouverte D_γ d'origine γ dans le plan C ; supposons ces demi-droites parallèles et disjointes. D_γ est un fermé de $C - \Gamma$. Posons

$$(1) \quad D = \bigcup_{\gamma \in \Gamma} D_\gamma.$$

D est alors un fermé de $C - \Gamma$, tel que $C - D$ est simplement connexe (en fait homéomorphe au plan).

2. Pour tout D_γ nous distinguons un "bord inférieur" et un "bord supérieur". Si σ'_+, σ''_+ sont deux arcs de Jordan d'origine $\zeta \in C - D$, aboutissants au même point ξ sur le "bord supérieur" de D_γ , situés à une extrémité près dans $C - D$, ils déterminent le même isomorphisme entre $\mathfrak{F}(\zeta)$ et $\mathfrak{F}(\xi)$. En effet, la courbe fermée $(\sigma''_+)^{-1}\sigma'_+$ de $C - \Gamma$ est homotope nul dans $C - \Gamma$.

Pour tout $\gamma \in \Gamma$ nous choisissons donc arbitrairement un $\sigma_{+\gamma}$ et un $\sigma_{-\gamma}$ d'origine ζ et d'extrémité $\xi_\gamma \in D_\gamma$. Pour simplifier les notations nous désignons également par

$$(2) \quad \sigma_{-\gamma}, \sigma_{+\gamma}: \mathfrak{F}(\zeta) \rightarrow \mathfrak{F}(\xi_\gamma)$$

les isomorphismes déterminés par ces arcs.

3. Considérons les lacets $\sigma_{+\gamma}^{-1}\sigma_{-\gamma}$ d'origine ζ ; notons θ_γ la classe d'homotopie de ce lacet dans $C - \Gamma$; les θ_γ constituent un système de générateurs de $\pi_1(C - \Gamma, \zeta)$. (On peut dire, grosso modo, que θ_γ opère dans $\mathfrak{F}$ comme un petit cercle centré à γ . De façon plus précise: Si $|\gamma - \xi_\gamma|$ est assez petit (que nous supposons dans la suite), $\sigma_{+\gamma}\sigma_\gamma^{-1}$ opère dans $\mathfrak{F}(\xi_\gamma)$, comme le cercle de centre γ , et de rayon $|\gamma - \xi_\gamma|$.)

4. Le module H_0 que nous allons construire figure dans E_2 de (3) du n° 2. Envisageons d'abord la somme directe

$$(3) \quad H^p = \sum_{\gamma \in \Gamma} H^p(F_\gamma) \quad (H = \sum_{p \geq 0} H^p; \zeta \notin \Gamma)$$

de μ modules isomorphes à $H^p(F_\zeta)$ (μ est le nombre de points de Γ). Définissons un homomorphisme

$$(4) \quad \begin{aligned} \delta: H &\rightarrow H(F_\zeta) \\ \text{noyau } H_0 &\quad \text{image } L_\zeta \end{aligned}$$

comme suit: Si $h \in H$, nous posons

$$(5) \quad \delta(h) = \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - \theta_\gamma) h_\gamma \quad (h = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_\gamma).$$

Selon la Proposition 2 du n° 11 l'image de δ est L_ζ . Le noyau de δ , noté H_0 dans (4) est caractérisé comme suit:

$$(6) \quad h \in H_0 \text{ équivaut } \sum_{\gamma \in \Gamma} (1 - \theta_\gamma) h_\gamma = 0 \quad (h = \sum_{\gamma \in \Gamma} h_\gamma).$$

5. Cela posé, nous prouvons le

LEMME 1. *Nous avons*

$$(7) \quad H^1(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \approx H_0^p$$

$$(8) \quad H^2(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \approx H^p(F)/L^p$$

(dans (8) nous utilisons la notation (12) du n° 2).

PREUVE. Écrivons la suite exacte

$$(9) \quad \begin{aligned} H^1(C - D, \mathfrak{F}^p) &\rightarrow H^1(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow H^1(D, \mathfrak{F}^p) \xrightarrow{d} \\ H^2(C - D, \mathfrak{F}^p) &\rightarrow H^2(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow H^2(D, \mathfrak{F}^p). \end{aligned}$$

Le premier, et le dernier module de (9) sont nuls, car $C - D$ est simplement connexe, et $\dim D = 1$. $\mathfrak{F}^p \mid D_\gamma$ est un faisceau ponctuellement constant, donc

$$(10) \quad H^1(D, \mathfrak{F}^p) = \sum_{\gamma \in \Gamma} H^p(F_{\xi_\gamma}).$$

Notons σ_γ une cochaîne de C ayant les propriétés suivantes: 1° le support $S(\sigma_\gamma)$ de σ_γ est la courbe fermée $\sigma_{-\gamma} \cup \sigma_{+\gamma}$; 2° si $\xi \in S(\sigma_\gamma)$, et $\xi \neq \zeta$, alors $\xi \sigma_\gamma$ est un cocycle; 3° $D_\gamma \sigma_\gamma$ est un cocycle, dont la classe engendre $H^1(D_\gamma)$ (en cohomologie entière). Un tel cocycle est facile à construire dans la couverture fine d'Alexander du plan C (cf. Fáry [4], pp. 123, 126); on pourrait utiliser le Corollaire 4 du n° 5 aussi. Notons $[K]$ la couverture fine du plan, à coefficients entiers, qui contient le cocycle σ_γ que nous avons construit. Il existe alors pour tout $h_\gamma \in H^p(F_{\xi_\gamma})$ un élément de $K \circ \mathfrak{F}^p$, tel que

$$(11) \quad D_\gamma(\sigma_\gamma \circ h') = (D_\gamma \sigma_\gamma) \circ h_\gamma$$

$$(12) \quad d(\sigma_\gamma \circ h') = e \circ (\sigma_{+\gamma} h_\gamma - \sigma_{-\gamma} h_\gamma),$$

où e désigne le cocycle de K dont le support est le point ζ et dont la classe de cohomologie est un générateur de $H^2(C)$ (en cohomologie à coefficients entiers).

Cela posé, le d de (9) est le δ de (4), (5).

Comme $C - D$ est simplement connexe, et $\mathfrak{F}^p \mid (C - D)$ est ponctuellement constant, nous avons

$$(13) \quad H^q(C - D, \mathfrak{F}^p) = \begin{cases} H^p(F_\xi), & \text{si } q = 2, \\ 0, & \text{si } q \neq 2. \end{cases}$$

L'isomorphie $H^2(C - D, \mathfrak{F}^p) \approx H^p(F_\xi)$ s'obtient de la façon suivante: à $h \in H^p(F_\xi)$ nous faisons correspondre $e \circ h$, où e est le cocycle ci-dessus construit.

La suite exacte (9) s'écrit donc comme suit:

$$(14) \quad 0 \rightarrow H^1(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow H^p \rightarrow H^p(F_\xi) \rightarrow H^2(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow 0$$

noyau H_0^p *image* L_ξ^p .

Cela prouve (7), (8), termine donc la preuve du Lemme 1.

6. Nous allons envisager la seconde différentielle d_2 de l'algèbre spectrale:

LEMME 2. La différentielle d_2 de E_2 de (3) du n° 2 est un homomorphisme

$$(15) \quad d_2: (\sum_{\gamma \in \Gamma} H(F_\gamma)) \rightarrow H_0;$$

elle s'annule pour les autres termes de (3) du n° 2.

$$(16) \quad (\text{noyau de } d_2) = N = \sum_{\gamma \in \Gamma} N(\gamma)$$

$$(17) \quad (\text{conoyau de } d_2) = Q_0 = H_0 / (H_0 \cap \sum_{\gamma \in \Gamma} I_\gamma),$$

où I_γ désigne $\sigma_{+\gamma} I'_\gamma$, et I'_γ est l'image de l'homomorphisme $H(F_\gamma) \rightarrow H(F_\xi)$ pour $\xi = \xi_\gamma$, défini dans (1) du n° 8.

PREUVE. Selon Fáy [5], Théorème 2 du n° 10, d_2 est la somme de deux différentielles: $d_2 = d' + d''$,

$$(18) \quad d': H^0(\Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow H^1(C - \Gamma, \mathfrak{F}^p),$$

$$(19) \quad d'': H^0(\Gamma, \mathfrak{F}^p) \rightarrow H^2(\Gamma, \mathfrak{F}^p),$$

où d' est le cobord d'un triangle exact, et d'' est nulle, puisque le second module de (19) est nul ($\dim \Gamma = 0$).

Reste à déterminer le cobord dans (18).

Si $h \in H(F_\gamma)$, on a $H(F_\gamma) \subset H^0(\Gamma, \mathfrak{F})$, et si $h \in N(\gamma)$, alors $d'h = 0$ selon la définition même de $N(\gamma)$, et du cobord (cf. le raisonnement ci-dessous).

Soit donné $h \in H^p(F_\gamma)$, $h \notin N(\gamma)$, et prouvons $d'h \neq 0$. Utilisons le voisinage fermé U de F_γ , qui est rétractile sur F_γ (v. la Proposition 4 du n° 1, et le n° 8). Choisissons un $h' \in H^p(U)$, tel que $h = F_\gamma h'$ (section par un fermé). Soit κ un cercle dans $f(U) \subset C$, centré à γ . s est le support d'un cocycle a de $C - \Gamma$, qui est le cobord d'une cochaîne b , tel que γb est l'unité. La classe de cohomologie de a dans $C - \Gamma$ est donc $\neq 0$ (cf. Fáy [4], p. 123, (21) la note 6). En utilisant a on peut donc construire un élément $a \circ \bar{h}$, dont la classe de cohomologie dans le second membre de (18) est non nulle, et telle que $a \circ \bar{h} = d'h$.

Cela prouve que d' s'annule précisément sur les éléments de N de (16).

La construction précédente montre ceci: Si $h_{\xi} \in I_{\xi}(\gamma)$ (notation du n° 8), alors $h_{\xi} = d'h$, $h \in H(F_{\gamma})$; (17) s'ensuit. La preuve du lemme est donc complète.

14. Preuve du Théorème B du n° 2

Dans les n°s 8–11 nous avons prouvé l'existence de N , Q , L qui figurent dans 1°, 2°, 3° du théorème en question, et nous avons examiné les propriétés de ces invariants.

Définissons à présent Q_0 . Vu (15) du n° 2, et (17) du n° 13, nous voyons que

$$H_0/(H_0 \cap (\sum_{\gamma \in \Gamma} I_{\gamma}))$$

est un sous-module de

$$Q = \sum_{\gamma \in \Gamma} Q(\gamma) = \sum_{\gamma \in \Gamma} H(F_{\gamma})/I_{\gamma}.$$

Si nous définissons donc Q_0 par (17) du n° 13, nous avons (16) du n° 2.

Cela posé, le Lemme 2 du n° 13 donne l'expression de E_3 du Théorème B du n° 2, si nous observons que d_2 est identiquement nulle sur les modules (8) du n° 13.

Pour achever la preuve du théorème, il suffit de remarquer que d_3 augmente le degré filtrant de 3, il est donc un homomorphisme $N \rightarrow H(F)/L$. Son noyau étant noté N_0 , nous avons (14) du n° 2. Les autres différentielles d_r , $r \geq 4$, sont nulles, puisque l'oscillation du degré filtrant est 3 (cf. (5) du n° 12), nous obtenons donc l'algèbre graduée $GH(X)$ dans la forme (18) du n° 2. Cela complète la preuve du principal résultat formulé dans le n° 2.

15. Calcul de la caractéristique de $\{E_r\}$

Cette caractéristique est, bien entendu, la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace X , mais nous allons obtenir une expression ((7) ci-dessous), qui l'exprime à l'aide des invariants de l'algèbre spectrale.

Dans ce qui suit nous supposons que l'anneau des coefficients A est un corps. Nous notons ΔH la dimension d'un espace vectoriel H sur A , comme dans (38) du n° 2. Les E_r , $r \geq 2$, sont des espaces vectoriels de dimension finie sur A , à condition que $H(X)$, ou bien $H(F_{\xi})$ soit de dimension finie, et nous posons dans ce cas

$$(1) \quad \chi(E_r) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l \Delta E_r(l) \quad (r \geq 2).$$

Cet entier est appelé caractéristique de $\{E_r\}$; il est connu que $\chi(E_r)$ est indépendant de $r(\geq 2)$, et que

$$(2) \quad \chi(E_r) = \sum_{l \geq 0} (-1)^l \Delta H^l(X).$$

Pour simplifier l'écriture nous noterons parfois $\chi(X)$ le second membre de (2); il est la caractéristique d'Euler-Poincaré de l'espace X .

Dans ce qui suit nous supposons que les valeurs critiques de f sont quadratiques non dégénérées, et nous notons μ leur nombre ($\Gamma = \{\gamma_1, \dots, \gamma_{\mu}\}$).

LEMME 1. $\Delta N^n + \Delta Q_0^{n-1} + \Delta L^{n-1} = \mu$.

PREUVE. A toute valeur critique $\gamma_j \in \Gamma$ nous attachons la classe de Lefschetz $l_j \in H(F_\xi)$, $\xi = \xi_j$ près de γ_j . (Cette classe a été définie dans le n° 3.3 dans le cas, où X est une variété algébrique, et avant le Théorème 1 du n° 6 nous avons remarqué que cette définition s'applique dans le présent cas.) Nous choisissons la numérotation des valeurs critiques de façon que

$$(3) \quad l_j \neq 0, \quad \text{si } 1 \leq j \leq \nu; \quad l_j = 0, \quad \text{si } \nu + 1 \leq j \leq \mu$$

(le cas $\nu = \mu$ n'est pas exclus; si la dimension n est impaire, nous avons ce cas.)

Selon le Théorème 1 du n° 6, et la Proposition 2 du n° 11 $L = L^{n-1}$ est l'espace vectoriel engendré par les vecteurs $l_1, \dots, l_\nu$. Vu (6), (17) du n° 13, Q_0^{n-1} est l'espace vectoriel des vecteurs $(a_1, \dots, a_\nu)$, $a_j \in A$, tels que

$$(4) \quad \sum_{j=1}^{\nu} a_j l_j = 0.$$

D'où: $\Delta Q_0^{n-1} + \Delta L^{n-1} = \nu$. Selon (28), (29) du n° 2 à toute valeur critique γ_j , $j = \nu + 1, \dots, \mu$ correspond $N(\gamma_j) = A$, alors que $N(\gamma_j) = 0$ pour $j = 1, \dots, \nu$. D'où $\Delta N = \mu - \nu$. Cela complète la preuve du lemme.

Dans ce qui suit nous supposons que $\chi(X)$ ou bien $\chi(F)$ est fini; l'une de ces hypothèses entraîne l'autre, vu le Lemme 1, est le Théorème B du n° 2.

Pour calculer $\chi(E_r)$ nous la transformons comme suit:

$$(5) \quad \begin{aligned} \chi(E_3) &= \sum_{l \geq 0} (-1)^l (\Delta N^l + \Delta Q_0^{l-1} + \Delta H^{l-2}(F) - \Delta L^{l-2}) \\ &= \sum_{l \geq 0} (-1)^l (\Delta N^l + \Delta Q_0^{l-1} + \Delta L^{l-1}) + \chi(F). \end{aligned}$$

Or, (24), (25), (32) du n° 2 prouvent que

$$(6) \quad \Delta N^l + \Delta Q_0^{l-1} + \Delta L^{l-1} = 0, \quad \text{si } l \neq n.$$

Nous obtenons donc:

$$(7) \quad \chi(E_3) = \chi(X) = (-1)^n \mu + \chi(F).$$

Le Corollaire 1 du n° 2 se déduit à présent des isomorphismes (cf. (36) du n° 2)

$$(8) \quad H^p(X) \approx H^{p-2}(F), \quad \text{si } p \neq n, n+1$$

et de (7).

16. Preuve des compléments du Théorème B du n° 2

Nous commençons par prouver l'invariance de la notion de classes finies d'un W^n , c'est-à-dire la Proposition 1 du n° 3. Utilisons les notations de celle-ci, et posons $W_\alpha^{n-1} = W^n \cap P_\alpha^{l-1}$, $\alpha = 1, 2$. Si nous écrivons la suite exacte des espaces W^n , W_α^{n-1} , et V_α^n , nous voyons que la proposition en question est équivalente à la

PROPOSITION 1. Si $h \in H(W^n)$, et $W_1^{n-1}h = 0$, on a également $W_2^{n-1}h = 0$.

PREUVE. Nous pouvons supposer $P_1^{l-1} \neq P_2^{l-1}$, et envisager la série linéaire d'hyperplans $\{P_\xi^{l-1}\}$ passant par $P_1^{l-1} \cap P_2^{l-1}$. Vu $W_1^{n-1}h = 0$, nous pouvons choisir

un cocycle $c \in h$, dont le support ne rencontre pas W_2^{n-1} ; c est donc un cocycle de V^n , et il faut prouver $V_2^{n-1}c \sim 0$.

Comme $\{P_{\xi}^{t-1}\}$ contient des hyperplans, qui ne sont pas tangents à W^n , il existe un ensemble fini Γ de valeurs de ξ , telles que, si $\xi \notin \Gamma$, $W^n \cap P_{\xi}^{t-1}$ n'a pas de singularités. Soit donc λ un arc de Jordan analytique par morceaux, qui relie les valeurs $\xi = 1, 2$ correspondantes à P_{α}^{t-1} , $\alpha = 1, 2$, et qui évite Γ . Soit Y la réunion des V_{ξ}^{n-1} , quand ξ parcourt λ . Alors $Y = \lambda \times V^{n-1}$ (V^{n-1} étant un V_1^{n-1} donné), et les sections $H(V_1^{n-1}) \leftarrow H(Y) \rightarrow H(V_2^{n-1})$ sont des isomorphismes. L'hypothèse $V_1^{n-1}c = 0$ implique donc $V_2^{n-1}c \sim 0$. Cela termine la preuve.

Dans ce qui suit nous préparons la démonstration du théorème de Lefschetz cité dans le n° 3 (Théorème 2 du n° 3). Utilisons les notations de ce théorème et soit $f: V^n \rightarrow C$ la fonction de la Proposition 5 du n° 1, qui satisfait aux Hypothèses 1, 2 du n° cité.

Si $n = 1$, V^1 est une courbe, et le théorème de Lefschetz revient à dire qu'elle n'est pas compacte.

Si $n = 2$, V^2 est une surface, et V_{ξ}^1 est une courbe. Or, $H^0(V^2) = 0$, car V^2 n'est pas compacte, il suffit donc de prouver que $H^1(V^2) = 0$. Appliquons le Théorème B du n° 2 à la fonction f définie dans V^2 . Nous avons $GH^1(V^2) = N_0^1 + Q_0^0 + H^{-1}(F)/L^{-1} = N_0^1 + Q_0^0$. Selon les Lemmes 1, 2 du n° 9 ces modules sont nuls, et cela prouve l'affirmation. Notons que nous avons prouvé en même temps les Compléments 1, 2 et (23) du n° 2 pour $n = 2$.

Cela posé, nous faisons une hypothèse d'induction: nous supposons le théorème valable pour les variétés de dimension complexe $\leq n - 1$ ($n \geq 3$). Si f n'a que des points critiques quadratiques, nous en déduisons immédiatement la validité du théorème en question pour V^n . En effet,

$$(1) \quad GH^p(V^n) = N_0^p + Q_0^{p-1} + H^{p-2}(V^{n-1})/L^{p-2}$$

est valable selon le Théorème B du n° 2. Or, les relations (24), (25) du n° 2 (que nous avons prouvé à la fin du n° 10) montrent que le second membre de (1) est $H^{p-2}(V^{n-1})/L^{p-2}$ pour $p \leq n - 1$, donc nul selon l'hypothèse d'induction, puisque V^{n-1} est une section hyperplane non singulière de V^n .

Par contre, si f a des points critiques non quadratiques ce raisonnement doit être complété par les relations des Compléments 1, 2 du n° 2. Nous allons donc prouver d'abord le

LEMME 1. Soit $CW^n(CV^n)$ un cône complexe de P^t (de C^t) dépourvu de génératrices multiples. Les relations

$$(2) \quad H^p(CW^n) = \begin{cases} Z, & \text{si } p \text{ est pair} \\ 0 & \text{si } p \text{ est impair} \end{cases} \quad 0 \leq p \leq n$$

$$(3) \quad H^p(CV^n) = 0, \quad \text{si } 0 \leq p \leq n - 1$$

découlent de la validité du Théorème 2 du n° 3 pour les variétés V^k , $k \leq n - 1$.

PREUVE. Nous prouvons d'abord (2). Soit s le sommet de CW^n . L'espace $CW^n - s$ est fibré: il passe une droite et une seule reliant un point $x \in CW^n - s$

à s ; nous notons C_x le complémentaire de s dans cette droite projective (C_x est, donc homéomorphe à C). La base de l'espace fibré $CW^n - s$ est une variété W^{n-1} dépourvue de singularités. Or, $H(C_x) = H^2(C_x) \approx A$; le générateur positif de $H^2(C_x)$ étant défini par la structure analytique complexe de CW^n (cf. (15) du n° 5), le groupe fondamental de W^{n-1} opère identiquement dans $H^2(C_x)$. Donc

$$H^p(CW^n - s) = H^{p-2}(W^{n-1}).$$

Le théorème de Lefschetz, supposé valable pour W^{n-1} , implique donc (2). Une suite exacte donne ensuite (3). La preuve du lemme est donc complète.

Cela étant nous pouvons compléter la preuve du théorème de Lefschetz. Dans l'algèbre spectrale de f les deux premiers membres de (1) sont nuls pour $p \leq n - 1$ selon le Lemme 1 et les résultats du n° 9. Cela prouve le Théorème 2 du n° 3 pour V^n . En même temps nous avons obtenu les Compléments 1, 2, 4 du Théorème B du n° 2. ((23) du n° 2 découle de (22) du n° 2, que nous avons prouvé dans le n° 11, et du Lemme 1.)

17. Preuve des énoncés du n° 4

Dans ce qui suit nous utilisons les notations du n° 4. Les variétés V^n , W^n seront donc des intersections complètes au sens des Définitions 1, 2 du n° 4.

LEMME 1. Soit V^n une intersection complète au sens de la Définition 2 du n° 4, et V^{n+1} la deuxième variété de la suite (2) du n° 4 (nous excluons $V^n = C^n$, mais nous admettons le cas $V^{n+1} = C^{n+1}$). Si $H^p(V^{n+1}) = 0$ pour $p \neq n + 1, 2n + 2$, alors $H^p(V^n) = 0$ pour $p \neq n, 2n$.

PREUVE. Selon l'hypothèse (cf. (3), (4) du n° 4) nous avons une application $f: V^{n+1} \rightarrow C$, telle que $V^n = f^{-1}(\xi)$ pour un $\xi \in C$, $\xi \notin \Gamma$, qui satisfait aux conditions du Corollaire 1 du n° 2. Nous avons donc

$$(1) \quad H^q(V^{n+1}) = H^{q-2}(V^n), \quad \text{si } q \neq n + 1, n + 2$$

selon le corollaire cité. D'où

$$(2) \quad H^p(V^n) = 0, \quad \text{pour } p \geq n + 1, p \neq 2n.$$

Le théorème de Lefschetz (Théorème 2 du n° 3) donne ensuite l'affirmation du lemme pour les degrés $\leq n - 1$. La preuve du lemme est donc complète.

NOTE. Dans les conditions du Lemme 1 nous avons donc:

$$(3) \quad \begin{cases} H^p(V^{n+1}) = H^{p-2}(V^n), & \text{si } p \neq n + 1, n + 2 \\ GH^{n+1}(V^{n+1}) = N_0 + Q_0 \\ d_3: N \approx H^n(V^n)/L \end{cases} \quad (L = L^n).$$

Si A est un corps, et n est pair, nous pouvons préciser davantage ces relations, vu que $N(\gamma) = 0$ pour tout γ :

$$(4) \quad \begin{cases} H^p(V^{n+1}) = H^{p-2}(V^n), & \text{pour } p \neq n + 1, n + 2 \\ H^{n+1}(V^{n+1}) = Q_0 & n \text{ pair.} \\ H^n(V^n) = L = L^n \end{cases}$$

(N.B.: selon la note 4 (4) est le cas général, et (3) est exceptionnel.)

Cela étant nous allons démontrer (12) du n° 4, c'est-à-dire

$$(5) \quad H^p(V^n) = 0, \quad \text{pour } p \neq n, \quad 2n,$$

par induction par rapport à $n' = t - n$ (nombre des termes de la suite (2) du n° 4). Si $n' = 1$, $V^{n+1} = C^{n+1}$, et le Lemme 1 donne (5). Nous pouvons donc envisager un V^n quelconque, et supposer (5) valable pour la seconde variété V^{n+1} de la suite (2) du n° 4. Le Lemme 1 donne alors (5), ce qui achève la preuve.

Si A désigne ensuite un corps de coefficients *quelconque*, (5) et (40) du n° 23 donnent immédiatement (23) du n° 4. Si $V^{n+1} = C^{n+1}$ dans cette formule, $\Delta H^{n+1}(C^{n+1}) = 0$ est indépendant du choix du corps des coefficients A ; nous en concluons selon (23) du n° 4 que $\Delta H^n(V^n)$ est, lui aussi, indépendant de A . La formule des coefficients universels (cf., par exemple, Leray [1], p. 33, 18.l.a.) et (5) donne alors

$$\text{Tors } H(V^n) = 0 \quad (A = Z)$$

pour le cas, où Z est l'anneau des coefficients.

Cela posé, prouvons (14) du n° 4. Dans la formules (40) du n° 2 nous substituons $X = C^{n+1}$, $F = V^n$. D'où $\Delta H^n(V^n) = \mu$, ce nombre étant (11) du n° 4. On contrôle d'une façon analogue par induction les formules (21), (23)–(26) du n° 4, ce qui achève la preuve des résultats concernant des intersections V^n .

LEMME 2. Si W^n est une intersection complète projective, nous avons

$$(6) \quad H^p(W^n) = \begin{cases} Z, & \text{si } p \text{ est pair, } p \neq n, \quad p \leq 2n \\ 0, & \text{si } p \text{ est impair, } p \neq n \end{cases} \quad (\text{anneau des coefficients: } Z).$$

Pour $p \leq n-1$, $H^p(W^n) = H_A^p(W^n)$, et pour $p \geq n+1$ $H^p(W^n) = (1/m)H_A^p(W^n)$ où m est le degré W^n (cf. la note 1).

PREUVE. Les affirmations sont valables pour $W^n = P^t$, nous supposons donc qu'elles le sont pour la seconde variété W^{n+1} de la suite (1) du n° 4. Grâce à (5) la suite exacte

$$(7) \quad H^p(V^{n+1}) \rightarrow H^p(W^{n+1}) \rightarrow H^p(W^n) \rightarrow H^{p+1}(V^{n+1})$$

prouve l'affirmation pour $p \leq n-1$: pour ces degrés nous avons $H^p(W^{n+1}) \approx H^p(W^n)$ vu (5), donc $H^p(W^n)$ est Z ou 0 selon la parité de p vu l'hypothèse d'induction. De plus, $H^p(W^n) = W^n H^p(W^{n+1}) = W^n W^{n+1} H^p(P^t) = W^n H^p(P^t)$ (sections par les fermés de P^t), d'où $H^p(W^n) = H_A^p(W^n)$ pour $p \leq n-1$. En utilisant ensuite la dualité de Poincaré (v. (22) du n° 5), nous obtenons (6) pour les degrés $p \leq n+1$. Cela prouve en particulier que (17) du n° 4 est valable. Si $e \in H^2(W^n)$ est le générateur positif (défini dans le n° 5), $e^n = m e_n$, où e_n est le générateur positif de $H^{2n}(W^n)$ (cf. (15) du n° 5), et m est par définition le degré de W^n . $e^p \cdot e^q = m e_n$ ($p+q=n$) prouve ensuite que $m H^p(W^n) = H_A^p(W^n)$ pour $p \geq n+1$; la preuve du Lemme 2 est donc complète.

Écrivons la suite exacte (7) pour un degré explicitement:

$$(8) \quad H^{n-1}(W^n) \rightarrow H^{n-1}(W^{n-1}) \xrightarrow{d} H^n(V^n) \rightarrow H^n(W^n) \rightarrow H^n(W^{n-1}).$$

Si n est *impair*, le dernier homomorphisme est nul, d'où $H^n(W^n) = H_F^n(W^n)$. Si $n = 2k$ est *pair*, il existe un $e' \in H^n(W^n)$, tel que $W^{n-1}e'$ soit le générateur positif de $H^n(W^{n-1})$; ce e' est déterminé mod $H_F^n(W^n)$. $W^{n-1}(me')$ étant le générateur positif de $H_A^n(W^{n-1})$, $me' - e^k = h_F$, où e^k est le générateur positif de $H_A^n(W^n)$, et h_F est une classe finie. Cela prouve que $\{e'\} \cap H_F^n(W^n) = 0$, donc la décomposition directe de (20) du n° 4. Notons encore: Tors $H(W^n) = \text{Tors } H(V^n) = 0$ implique que e^k n'est pas divisible par un entier, mais en lui ajoutant h_F nous avons l'élément me' , qui, lui, est divisible par m .

INSTITUT HENRI POINCARÉ
PARIS

BIBLIOGRAPHIE

- É. CARTAN, [1]: *Sur les propriétés topologiques des quadriques complexes*, Publ. Math. de l'Univ. de Belgrade, 1 (1932), pp. 1-20.
- H. CARTAN, [1]: *Homologie et cohomologie des variétés*, Séminaire de Topologie algébrique ENS, I (1948-49), Exposé XVII (polycopié).
- I. FÁRY, [1]: *Sur les anneaux spectraux de certaines classes d'applications. III. Fonctions numériques (différentiables)*, C. R. Acad. Sci. Paris, 235 (1952), pp. 686-688.
- [2]: IV. *Cohomologie des hypersurfaces algébriques*, Ibid., pp. 1467-1469.
- [3]: V. *Application de X sur X/G . Sur le terme E_2* , C. R. Acad. Sci. Paris, 236 (1953), pp. 1224-1226.
- [4]: *Notion axiomatique de l'algèbre de cochaines dans la théorie de J. Leray*, Bull. Soc. Math. France, 82 (1954), pp. 97-135.
- [5]: *Valeurs critiques et algèbres spectrales d'une application*, Ann. of Math., 63 (1956), pp. 437-490.
- F. HIRZEBRUCH, [1]: *Arithmetic genera and the theorem of Riemann-Roch for algebraic varieties*, Proc. Nat. Acad. Sci. U.S.A., 40 (1954), pp. 110-114.
- [2]: *Der Satz von Riemann-Roch und das Toddsche arithmetische Geschlecht für algebraische Mannigfaltigkeiten*, Proc. Int. Cong. of Math. Amsterdam, II (1954), pp. 232-234.
- S. LEFSCHETZ, [1]: *L'Analysis situs et la Géométrie algébrique*, Gauthier-Villars, Paris, 1924.
- [2]: *Géométrie sur les surfaces et les variétés algébriques*, Mémoires des Sciences Math., XL, Gauthier-Villars, Paris, 1929.
- [3]: *Algebraic Topology*, Amer. Math. Soc. Colloquium Publications, XXVII, 1942.
- [4]: *Algebraic Geometry*, Princeton University Press, 1953.
- AND J. H. C. WHITEHEAD, [1]: *On analytical complexes*, Trans. Amer. Math. Soc., 35 (1933), pp. 510-517.
- J. LERAY, [1]: *L'anneau spectral et l'anneau filtré d'homologie d'un espace localement compact et d'une application continue*, J. Math. Pures Appl., 29 (1950), pp. 1-139.
- [2]: *L'homologie d'un espace fibré dont la fibre est connexe*, Ibid., pp. 169-213.
- [3]: *Hyperbolic Differential Equations*, polycopié, Princeton, 1954.
- I. PETROWSKY, [1]: *On the diffusion of waves and the lacunas for hyperbolic equations*, Rec. Math. (Mat. Sbornik) N.S., 17 (1945), pp. 289-368.
- G. DE RHAM, [1]: *Variétés différentiables*, Act. Sci. Ind., 1222, Hermann, Paris, 1955.
- H. SEIFERT UND W. THRELFALL, [1]: *Variationsrechnung im Grossen*, Teubner, Berlin, 1938.

- N. STEENROD, [1]: *The Topology of Fibre Bundles*, Princeton Math. Series, 14, Princeton, 1951.
- R. THOM, [1]: *Espaces fibrés en sphères et carrés de Steenrod*, Ann. École Norm., 69 (1952), pp. 109–182.
- B. L. VAN DER WAERDEN, [1]: *Zur algebraischen Geometrie. IV. Die Homologiezahlen der Quadriken und die Formeln von Halphen der Liniengeometrie*, Math. Ann., 109 (1934), pp. 7–12.
- [2]: *Einführung in die algebraische Geometrie*, Springer, Berlin, 1939.
- A. H. WALLACE, [1]: *Homology on algebraic varieties*, Proc. Int. Cong. of Math., Amsterdam, II (1954), pp. 263–264.

DEUXIÈME THÈSE

PROPOSITIONS DONNÉES PAR LA FACULTÉ

“SINGULARITÉS DE SOUS-ENSEMBLES ANALYTIQUES
D'UNE VARIÉTÉ ANALYTIQUE COMPLEXE”

VU ET APPROUVÉ

PARIS, LE 13 JUIN 1955

LE DOYEN DE LA FACULTÉ
DES SCIENCES,

J. PERES

VU ET PERMIS D'IMPRIMER:
LE RECTEUR DE L'ACADÉMIE
DE PARIS

JEAN SARRAILH



